



Juho Keiski

Maaperän jäykkyysparametrien epävarmuuden hallinta rakennuksen rungon suunnittelussa

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten.

Espoossa 3.4.2018

Valvoja: Professori Jari Puttonen

Ohjaaja: DI Joonas Tuikka

Tekijä Juho Keiski

Työn nimi Maaperän jäykkyysparametrien epävarmuuden hallinta rakennuksen rungon suunnittelussa

Koulutusohjelma Building technology

Pää-/sivuaine

Koodi CE.thes

Työn valvoja Professori Jari Puttonen

Työn ohjaaja(t) DI Joona Tuikka

Päivämäärä 3.4.2016

Sivumäärä 52+18

Kieli suomi

Tiivistelmä

Rakennuksen rungon suunnittelussa maaperän jäykkyysparametrien epävarmuus tulee esille rakennemallin tukiehtoja määritettäessä. Tavallisesti kaupallisissa FEM-ohjelmitoissa maaperästä aiheutuva tukien joustavuus mallinnetaan jousielementeillä. Useista epävarmuuden lähteistä johtuen jousien jäykkyydet sisältävät vaihteluvälin arvoja, joista muodostuu lukuisia tukien lähtötietojen kombinaatioita. Maaperän jäykkyyteen liittyvien lähtötietojen epävarmuus aiheuttaa laskennallisten siirtymien ja rakenteen sisäisten voimien epävarmuuden.

Tässä työssä kehitetään metodiikkaa hallita maaperän jäykkyysparametrien epävarmuutta rakennuksen rungon suunnittelussa. Tutkittu metodiikka hyödyntää luotettavuusperusteisesta suunnittelusta tuttua periaatetta muotoilla epävarmuutta sisältävät lähtötiedot satunnaismuuttujiksi. Esimerkkilaskelmissa kuormia ja materiaaliominaisuuksia ei käsitellä satunnaismuuttujina, eli tutkittu ratkaisumalli ei ole luotettavuusperusteista suunnittelua.

Maa-jousien jäykkyyksiin liittyvä epävarmuus hallitaan algoritmilla, joka käy läpi kaikki satunnaismuuttujat johtaen niiden tilastollisen epävarmuuden rakennemallin tuloksille. Esimerkkilaskelmilla testataan metodiikkaa ja pyritään löytämään rakennuksen rungon suunnittelun käyttötarkoitukseen sopiva ratkaisumalli.

Työ kertoo lisäksi epävarmuuden välittymisestä maaperän jäykkyysparametreilta maa-jousille. Tämän lisäksi tutkimus selittää, mitkä rakenteen ominaisuudet vaikuttavat epävarmuuden välittymiseen jousituilta sisäisille voimille. Geo- ja rakenneteknisiin normeihin sekä suosituksiin luodaan lyhyt katsaus arvioiden niiden yhtenevyyttä alojen rajapintaan sijoittuvassa tutkimusongelmassa.

Metodiikka osoittautui hyödylliseksi, koska sillä maaparametrien epävarmuus välitetään rakennemallin sisäisille voimille, mikä havainnollistaa epävarmuuden vaikutuksia numeroin. Algoritmissa käytettiin systemaattista tai osittain satunnaista otantaa. Tämä tutkimus suosittelee jatkokehityksessä käytettäväksi osittain satunnaista, tai muuta satunnaisuuteen perustuvaa otantaa, koska laskentojen lukumäärää voidaan hallita paremmin verrattuna systemaattiseen otanta-algoritmiin. Koska tässä työssä koestettiin pistemäisesti tuettuja rakennemalleja, niin jatkotutkimusta suositellaan tehtäväksi jatkuvasti ja laattamaisesti tuetuille rakenteille.

Avainsanat epävarmuusanalyysi, Latin hypercube -otanta, ositettu otanta, rakenne-suunnittelu, rakennuksen rungon suunnittelu, siirtymämenetelmä



Author Juho Keiski

Title of thesis Procedure for managing the uncertainty about soil stiffness in designing the load-bearing structures of buildings

Degree program Building technology

Major

Code CE.thes

Thesis supervisor Professor Jari Puttonen

Thesis advisor(s) Mr. Joona Tuikka, M.Sc. (Tech.)

Date 3.4.2016

Number of pages 52+19

Language Finnish

Abstract

When modelling the supports of a structural building frame, the uncertainty caused by soil stiffness parameters becomes introduced to the structural analysis. Commonly the spring elements model the flexibility of foundation supports when utilizing commercial FEM-software. Due to several sources of uncertainty these spring elements have a wide range of initial data that creates numerous possible calculation combinations. Uncertainty about soil stiffness causes that the results, such as deformations and internal forces, contain uncertainty.

This study develops procedure for managing uncertainty about soil stiffness in designing the load-bearing structures of buildings. The procedure researched utilizes the principle commonly used in reliability based design (RBD) that formulates uncertainty of an initial data under random variables. However, the example calculations of this study do not manage uncertainty about the loads and structural material at all, which a regular RBD does.

In the procedure researched, an algorithm loops through the random variables conveying their uncertainty to the results of a structural calculation model. Simple case studies test the proposed methodology and aim to find the most prominent solution procedure for the structural design purposes.

Additionally, this study relates about conveying of uncertainty from the soil stiffness parameters to a foundation spring. Furthermore, the paper describes the structural properties affecting on conveying of uncertainty from the foundation springs to the internal forces. The type of research problem strongly locates in between several parties of a construction project, and thus this paper reviews shortly on the design standards and recommendations, aiming to evaluate their integrity regards the uneven settlements of buildings.

The methodology developed appeared to be useful as it conveys the uncertainty from foundations support springs to the internal forces which clarifies the effect of uncertainty and presents it numerically. The developed algorithms with systematical and stratified random sampling were tested. As a result, this thesis proposes stratified, or some other type of random sampling, to be utilized in a further research of the procedure. Stratified sampling has potential regards larger structural models and more sufficient controllability of the calculation time compared to the systematical sampling of initial data. Further research regards the procedure is proposed to be carried on for structural models with continuous and slab foundations.

Keywords RBD, LHS, stratified sampling, structural design, deformation method

Alkusanat

Diplomityöni oli äärimmäisen haastava prosessi, sillä missään vaiheessa opiskelu-uraani en ole käynyt läpi näin laajaa ja vaativaa projektia. Työ oli samalla hyvin opettavainen kokemus ja jatkoa ajatellen varmasti monella tapaa hyödyllinen. Tämänkaltainen poikkitieteellinen projekti antoi uutta näkemystä alkavalle työuralleni, erityisesti ohjelmoinnin ja geotekniikan osa-alueiden kautta rakennetekniikkaa väheksymättä.

Kiitän Joona Tuikkaa ja Aki Vuoliota Ramboll Finland Oy:stä työn mahdollistamisesta sekä Matti Piristä, Joonas Nykyriä, Samuli Laaksosta, Taavi Dettenbornia ja Ari Hartikaista arvokkaista neuvoista työn aikana. Aalto-yliopistolla kiitos kuuluu Jari Puttoselle, Leena Korkiala-Tantulle, Monika Löfmanille ja Djebbar Baroudille vahvasta teoreettisesta tuesta.

En unohda rakasta Rakennusinsinööriä ja sen korvaamatonta tukea raskaan opintopolkuni varrella. Suurimman kiitoksen ja halauksen annan ystävilleni, jotka värittävät elämääni työn ja koulun ajoittaisessa harmaudessa.

Espoossa 3.4.2018



Juho Keiski

Sisällysluettelo

Tiivistelmä

Abstract

Alkusanat

Sisällysluettelo

Merkinnät

Lyhenteet ja määritelmät

1	Johdanto	1
2	Tutkimusongelma osapuolten rajapinnassa	2
3	Maaperän jäykkyyden epävarmuuden hallinta.....	4
3.1	Ääriarvotarkastelu ja epävarmuuden välittyminen	4
3.2	Rakenteen toiminnallinen aksiaalijäykkyys	7
3.3	Ääriarvotarkastelun haasteet.....	8
4	Luotettavuuteen perustuva suunnittelu	10
4.1	Taustaa.....	10
4.2	Menetelmän periaate	11
4.3	Luotettavuusindeksi	12
4.4	Satunnaisotoksen muodostaminen	14
5	Maaperän jäykkyysparametrien epävarmuus rungon suunnittelussa	19
5.1	Maaperän jäykkyysparametrit.....	19
5.2	Maaperän muodonmuutosten arvioiminen	20
5.3	Maaperän jäykkyyttä kuvaavat parametrit rakennesuunnittelussa.....	22
5.3.1	Epävarmuuden välittyminen jousivakiolle painumalaskennan kautta	23
5.4	Epävarmuuden luokittelu.....	25
5.5	Käyttö- ja murtorajatilan tarkasteleminen	25
5.6	Maaperän joustavuus FEM-laskennassa.....	26
5.6.1	Maaperän ja rakenteen välinen vuorovaikutus	27
5.7	Painumaeroja koskevat suositukset.....	29
6	Epävarmuusanalyysi	32
6.1	Rakennemalli ja materiaaliominaisuudet	32
6.2	Numeerinen ratkaisu	33
6.3	Kaksiaukkoinen tasokehä ja ratkaisumallin haasteet	37
6.3.1	Lähtötiedot.....	37
6.3.2	Numeerinen ratkaisu	38
6.3.3	Tulokset	39
6.4	Metodiikan pelkistäminen ääriarvoanalyysiksi	41
6.5	Fraktiiliin perustuva mitoitus.....	42
6.5.1	Analyttinen ratkaisu tutkimuksen apuna	42
6.6	Osittain satunnaisen otanta	45
6.7	Vertailu systemaattiseen otantaan	45

6.8	Laskennallisen satunnaisuuden aiheuttama tilastollinen vaihtelu.....	47
6.9	Epävarmuusanalyysin haasteet kokonaisten rakennusten mittakaavassa.....	48
7	Yhteenveto	50
	Lähdeluettelo.....	51
	Liiteluettelo	

Merkinnät

Latinalaiset isot kirjaimet

A_{pl}	$[m^2]$	poikkileikkauksen pinta-ala
D	$[m]$	perustamissyvyys
E		kuormien vaikutus (satunnaismuuttuja)
E	$[Pa]$	Kimmokerroin
EA	$[N]$	aksiaalijäykkyys
EI	$[Nm^2]$	taivutusjäykkyys
G	$[Pa]$	liukumoduuli
H_k	$[m]$	tasokehän korkeus
H_{pp}	$[m]$	painuvan maakerroksen kokonaispaksuus
I_i	$[m^4]$	jäyhyysmomentti akselin i-i suhteen
M_i	$[Nm]$	taivutusmomentti akselin i-i suhteen
N_i	$[N]$	normaalivoima i-akselin suuntaan
P_f		vaurioitumistodennäköisyys
R		kestävyys (satunnaismuuttuja)
T	$[N]$	tukireaktio
V	$[N]$	leikkausvoima

Latinalaiset pienet kirjaimet

b_a	$[m]$	neliöanturan sivumitta
g		yhteisfunktio (satunnaismuuttuja)
h_a	$[m]$	neliöanturan korkeus
k	$[N/m]$	jousivakio
k_{min}	$[N/m]$	jousivakion alaraja
k_{moodi}	$[N/m]$	jousivakio moodi
k_{max}	$[N/m]$	jousivakio yläraja
m		moduuliluku
n		otoskoko

q_i	$[N/m]$	tasaa jakautunut kuormitus i -akselin suuntaan
s	$[m]$	painuma
z	$[m]$	syvyys anturan alapinnasta mitattuna
δs	$[m]$	epätasainen painuma

Kreikkalaiset pienet kirjaimet

α	$[rad]$	kulmanmuutos
β	$[rad]$	Eurokoodin mukainen suhteellinen kiertymä
β		tangenttimoduulimenetelmän jännityseksponentti
γ'	$[N/m^3]$	maalajin tehokas tilavuuspaino
$\Delta\sigma_z$	$[Pa]$	maakerroksen pystysuuntaisen jännityksen muutos
ε_i		maakerroksen i kokoonpuristuma
θ	$[rad]$	kiertymä
μ_i		satunnaismuuttujan i odotusarvo
ν		Poissonin luku
σ_0	$[Pa]$	maakerroksen pystysuuntainen alkujännitys
σ_i		satunnaismuuttujan i keskihajonta
σ_ν	$[Pa]$	tangenttimoduulimenetelmän referenssijännitys
σ_z	$[Pa]$	maakerroksen pystysuuntainen kokonaisjännitys
φ'	$[deg]$	maalajin leikkauskestävyyskulma
ω	$[rad]$	kallistuma

Lyhenteet ja määritelmät

Lyhenteet

<i>bin</i>	histogrammin pylvään leveys eli luokkaväli
<i>FEM</i>	elementtimenetelmä (engl. <i>finite element method</i>)
<i>LHS</i>	tilastollinen otantamenetelmä (engl. <i>Latin hypercube sampling</i>)
<i>MCS</i>	Monte Carlo -simulaatio (engl. <i>Monte Carlo -simulation</i>)
<i>RBD</i>	luotettavuuteen perustuva suunnittelu (engl. <i>reliability based design</i>)
<i>RC</i>	luotettavuusluokka (engl. <i>reliability class</i>)
<i>RFEM</i>	Dlubalin elementtimenetelmään perustuva tietokoneohjelma
<i>RIL</i>	Suomen Rakennusinsinöörien Liitto
<i>TA</i>	todennäköisin arvo
<i>VBA</i>	ohjelmointikieli (engl. <i>Visual Basic for Applications</i>)

Määritelmät

<i>fraktiili</i>	satunnaismuuttujan arvo, jonka alle jää tietty prosenttiosuus alkioista, esimerkiksi 5 % fraktiili
$P(x < A)$	todennäköisyys tapahtumalle satunnaismuuttujan alkio x on pienempi kuin A
<i>Python</i>	ohjelmointikieli

1 Johdanto

Rakennuksen rungon suunnittelu on tarkentunut elementtimenetelmän käytön yleistyttyä. Nykyään rakennuksia suunniteltaessa on lähes poikkeuksetta käytössä tietokoneavusteinen laskentamalli, jolla voidaan elementtimenetelmään perustuen määrittää siirtymät ja sisäiset voimat missä tahansa kohdassa rakennusta. Laskentatehon lisääntyttyä FEM-laskennalla voidaan tarvittaessa huomioida materiaalin ja geometrian epälineaarisuus suhteessa kuormitukseen ja saavuttaa lähtötietojen puitteissa hyvinkin tarkkoja tuloksia nopeasti. Saavutettavien tulosten luotettavuutta heikentävät lähtötietojen epävarmuus ja mallin geometrinen rajoittaminen erityisesti kuvattaessa maan ja rakenteen yhteistoimintaa. Tässä tutkimuksessa keskitytään siihen, miten maaperän jäykkyyssparametrien epävarmuuden vaikutusta edellä mainittuihin tuloksiin voidaan tutkia.

Rakennesuunnittelussa maaperän jäykkyyssparametrien epävarmuus tulee esille rakennemallin tukiehtoja määritettäessä. Tavallisesti kaupallisissa FEM-ohjelmistoissa maaperästä aiheutuva tukien joustavuus mallinnetaan jousielementeillä. Useista epävarmuuden lähteistä johtuen maajousen jäykkyydelle on mahdotonta määrittää yksittäinen arvo, mikä ei itsessään ole ongelma, koska epävarmuutta voidaan hallita varmuuskertoimilla. Jousen jäykkyyttä voidaan redusoida varmuuskertoimella suhteessa lähtötiedon vaihteluvälin pituuteen. Haasteena on rakennuksen tukipisteiden joustavuuksien kriittisten yhdistelmien löytäminen. Yhtä maajousta redusoidaessa toista tulee kasvattaa varmuuskertoimella, mikä aiheuttaa suurimman laskennallisen painumaeron ja tämän myötä kriittisimmän tilanteen rakenteen kannalta.

Suurilla rakennemalleilla maajousia voi olla kymmeniä. Vaikka jokaiselle jouselle annettaisiin vain ylä- ja alaraja, niin jousivakioiden yhdistelmiä muodostuu laskettavaksi satoja. Työssä tutkitaan miten satunnaisuuteen perustuvaa itseään toistavaa simulaatiota voidaan hyödyntää epävarmuuden hallinnassa ja erityisesti simulaation laskentakertojen hallinnassa, ajatellen kokonaisten rakennusten kokoisia laskentamalleja. Simulaation etuja ja haasteita arvioidaan työssä laskentaesimerkein, jotka sisältävät enimmillään kolme maajousta.

2 Tutkimusongelma osapuolten rajapinnassa

Rakennuksen rungon suunnittelussa maan ja rakenteen välinen rajapinta muodostuu samalla eri osapuolten väliseksi rajapinnaksi. Maaperän suunnittelusta vastaavat geotekniset suunnittelijat ja rungon suunnittelusta rakennesuunnittelijat. Lisäksi toteutuksesta vastaa tavallisesti kaksi eri osapuolta jakaen rakennusurakan osiin.

Mahdolliset epävarmuustilanteet olisi edullista pystyä huomiomaan rungon suunnittelussa. Esimerkiksi rakennukseen sijoitettavien massiivisten laitteiden sijainnit voivat sisältää merkittävää epävarmuutta vaikuttaen perustusten kuormituksiin ja painumakäyttäytymiseen. Perustuksen painumat edelleen vaikuttavat rungon rasituksiin. Toinen mahdollinen rajapinnan aiheuttama epävarmuuden lähde on maan ominaisuuksien mittaaminen. Maaperätutkimuksia ja dataa maaparametreista voi olla käytettävissä hyvin niukasti tai niitä joudutaan odottamaan, kun taas rakennuksen runkoa ja erityisesti perustuksia tulisi päästä suunnittelemaan varhaisessa vaiheessa projektia.

Vaikka pohjatutkimusdataa olisikin käytettävissä, niin se voi sisältää merkittävää epävarmuutta. Eri suunnittelualoilla tottumukset käsitellä lähtötietojen epävarmuutta poikkeavat jossain määrin. Geoteknisessä suunnittelussa lähtötietojen suurpiirteisyys on oletusarvoista suhteessa rakennesuunnitteluun, jossa laskennan lähtötiedot ovat tavallisesti kertaluokkaa tarkempia. Tilanteelle edullista olisi, ettei geoteknisen suunnittelijan tarvitse luovuttaa yksittäisiä lähtötietoparametreja suurelta vaihteluväliltä, vaan että rakennesuunnittelussa pystyttäisiin huomiomaan geoteknisten lähtötietojen epävarmuus. Maaparametrien epävarmuus voi rakennesuunnittelijan totumuksille vaikuttaa merkittävältä, mutta tavallisesti tämän suhteellisen suurelta vaikuttavan epävarmuuden seuraukset suunnittelulle ovat hyvin pieniä. Hämmennyksen välttämiseksi edullista olisi hyödyntää jonkunlaista laskentatyökalua tutkimaan epävarmuuden vaikutusten suuruusluokkaa. Tietotekniikan nopea kehitys on tuonut uusia mahdollisuuksia suurta tietomäärää käsittelevien työkalujen kehittämiseen. Rakennesuunnittelussa tämä on havaittu FEM-laskennan yleistymisenä. FEM-laskennalla voidaan hyvinkin nopeasti tutkia kokonaisten rakennusten käyttäytymistä, mutta jostain syystä maaperän käyttäytymisen mallintaminen ei ole yhteydessä rakenneteknisiin laskentaohjelmiin. Yksi syy lienee rajapinta tieteenalojen välillä, sillä tämänkaltaisten työkalujen kehittäminen vaatii vahvaa osaamista molemmilta aloilta tietotekniikkaa unohtamatta.

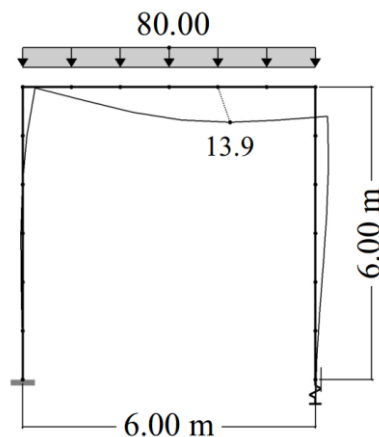
Maaperän ja rakenteiden suunnittelua lisäksi ohjaavat eri normit. Geoteknisessä suunnittelunormissa pyritään ottamaan mahdollisimman vähän kantaa epätasaisten painumien raja-arvoihin, sillä vaatimukset niitä koskien ovat materiaali ja tapauskohtaisia. Käyttörajatilassa tapahtuva painumatarkastelu koskee enemmän rakenteiden suunnittelua, eikä geotekninen suunnittelija välttämättä ole oikea henkilö arvioimaan perustuksen sallittua painumaa. Toisaalta geotekninen suunnittelu tavallisesti antaa perustamistapalausunnon ja mitoittaa maanvaraiset perustukset painuman suhteen. On selvää, että tässä tilanteessa osapuolten välinen

kommunikaatio täytyy olla aktiivista, jotta rakenne tulee suunnitelluksi riittävällä varmuudella. Riittävä varmuus taataan varmuuskertoimilla, mikä on yksi haaste suunnittelualojen rajapinnassa. Tavallisesti lujuuksia redusoidaan ja kuormia kasvatetaan ominaisarvoistaan, mutta painumien tapauksessa tämä ei johda kriittisimpään tulokseen. Toisin sanoen epätasaisia painumia arvioitaessa mahdollisia kuormien ja lujuuksien osavarmuuksilla käsiteltyjä yhdistelmiä täytyy muodostaa lukuisia, jotta kriittisin tulos löydetään.

3 Maaperän jäykkyyden epävarmuuden hallinta

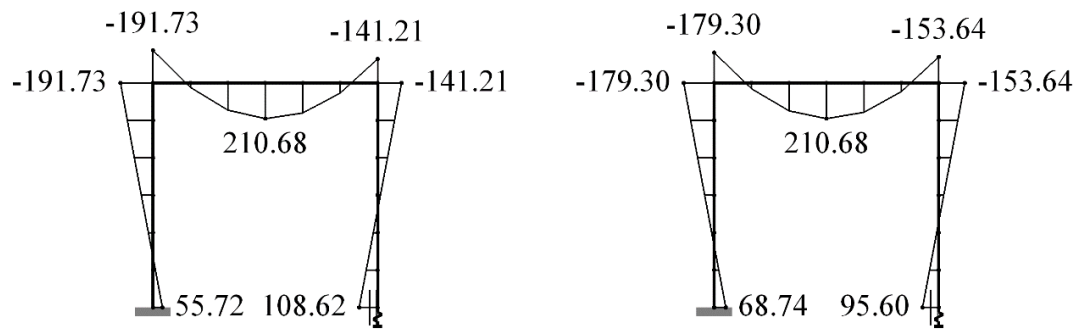
3.1 Ääriarvotarkastelu ja epävarmuuden välittyminen

Kuvitellaan tilanne, jossa suunniteltava rakennus sijaitsee alueella, jolla kallionpinta vaihtelee ollen välillä perustamistasossa. Tarkasteltavana on yksittäinen osa rakennusta, yksiaukkoinen kehä, jonka toinen pilari on perustettu kalliolle ja toinen lievästi painuvalle maainekselle (Kuva 1). Maaperätutkimuksien ja niiden perusteella tehtyjen laskelmien mukaan oikeanpuoleinen tuki painuu 5 – 10 mm, kun taas vasen perustus on kallioilla ja oletetaan painumattomaksi. Suomessa kallio on suhteellisen hyvälaatuista eikä painumalaskennalla sen suhteen ole käytännön merkitystä (Korhonen 1985, s. 386). Vaikka kuorma on vakio, niin maatuen painuma voi saada mitä tahansa arvoja edellä mainitulta väliltä. Tämä on maaperästä aiheutuvaa epävarmuutta, joka muodostuu monista eri lähteistä kuten esimerkiksi maaperätutkimusten tulosten vaihtelusta. Tässä esimerkissä tiedetään vain painuman mahdolliset ääriarvot, eikä tarkempia tietoja epävarmuuden luonteesta kuten esimerkiksi sen tilastollista jakaumaa. Lähtötiedon esittämistä satunnaismuuttujana havainnollistetaan myöhemmin luvun 6 esimerkeissä.



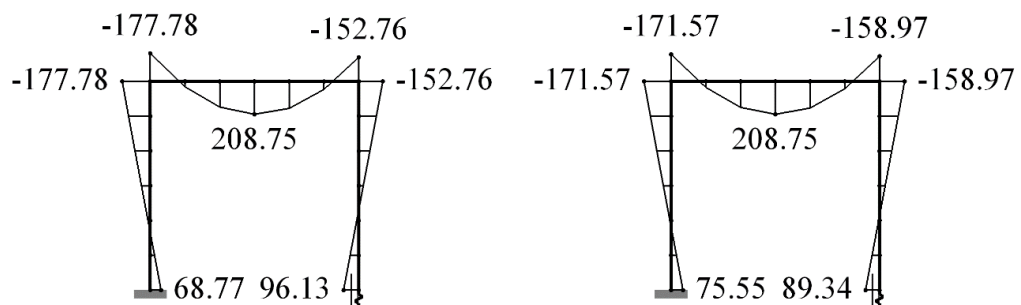
Kuva 1. Tasokehän rakennemalli, mitat, kuorma ja muodonmuutos oikeanpuoleisen tuen painuessa 10 mm

Tässä tapauksessa epävarmuuden hallinta tapahtuu yksinkertaisesti mallintamalla ylä- ja alarajaa vastaavat tilanteet, jolloin myös sisäisille voimille saadaan ääriarvot. Käytännössä suoritetaan FEM-laskelma kahdella jousen jäykkyydellä, jolloin jokaiselle tutkittavalle muuttujalle on kaksi tulosta. Laskennan tuloste (Kuva 2) sisältää taivutusmomentin arvoja, mutta samanlainen tarkastelu tulee tehdä muillekin sisäisille voimille eli tässä tapauksessa normaali- ja leikkausvoimille. Suuremmalla painumalla havaitaan globaalit maksimiarvot, mutta painuman ala-arvo tuottaa mitoittavan momentin osassa rakenteen poikkileikkauksia.



Kuva 2. Esimerkin momenttikuvaajat: vasen 10,6 mm ja oikea 5,4 mm painumaerolla

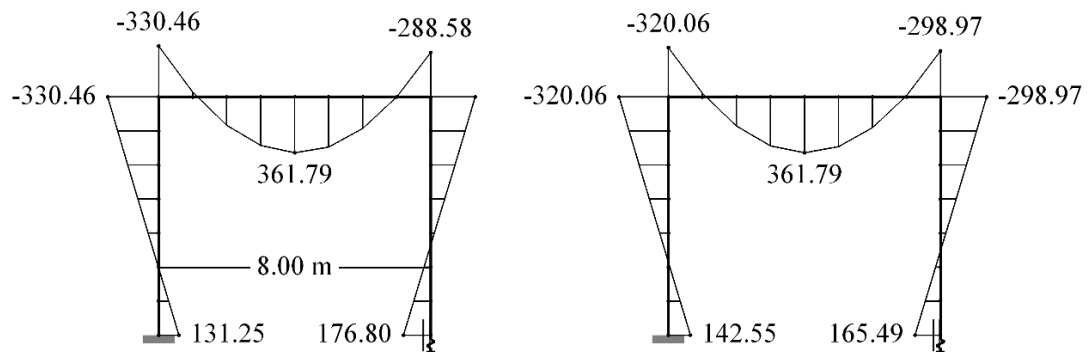
Painuman vaihteluväli havaitaan taivutusmomentin vaihteluvälinä, joka esimerkiksi vasemmalle ylänurkalle on 12,43 kNm . Toisin sanoen 5 mm vaihteluväli painumalla aiheuttaa kuvan 2 mukaiset vaihteluvälit momentilla. Kutsutaan tätä epävarmuuden välittymiseksi rakenteelle. Välittyminen riippuu rakenteesta ja tarkasteltavasta kohdasta rakennetta. Esimerkiksi palkin kenttään epävarmuus ei välity, kun taas rakenteen nurkissa ilmenee huomattavaa epävarmuutta. Rakenteen vaikutusta epävarmuuden välittymiseen havainnollistetaan kuvassa 3. Siinä kehän taivutusjäykkyyttä on pienennetty 48 %, jolloin nurkkamomentin vaihteluväli on enää 6,21 kNm eli noin puolet aikaisemmasta epävarmuudesta.



Kuva 3. Momenttikuvaajat kehän alhaisemmalla taivutusjäykkyydellä: vasen 10,5 mm ja oikea 5,3 mm painumaerolla

Muutkin rakenteen ominaisuudet kuin taivutusjäykkyys vaikuttavat epävarmuuden välittymiseen. Rakenteen geometria vaikuttaa jossain määrin, mutta vaikutuksen luonnetta on haastavaa tai jopa mahdotonta selittää yleisellä tasolla. Tässä esimerkissä yksittäisten rakenneosien hoikistaminen, eli pituuden kasvattaminen tai taivutusjäykkyyden pienentäminen, vähentää epävarmuuden välittymistä. Rakenneosien pituuksien kasvattamisella on samankaltainen vaikutus epävarmuuden välittymiseen kuin taivutusjäykkyyden pienentämisellä. Esimerkiksi kehän jännevälin kasvattaminen pienentää rakenteen globaalia jäykkyyttä, mikä havaitaan jälleen sisäisten voimien vaihteluväleissä. Kuva 4 sisältää momentin ääriarvot kehälle, jonka jänneväliä on kasvatettu 33 %. Verrattaessa jälleen vasemman ylänurkan momenttia havaitaan alhaisempi epävarmuuden välittyminen. Vaihteluväli oli

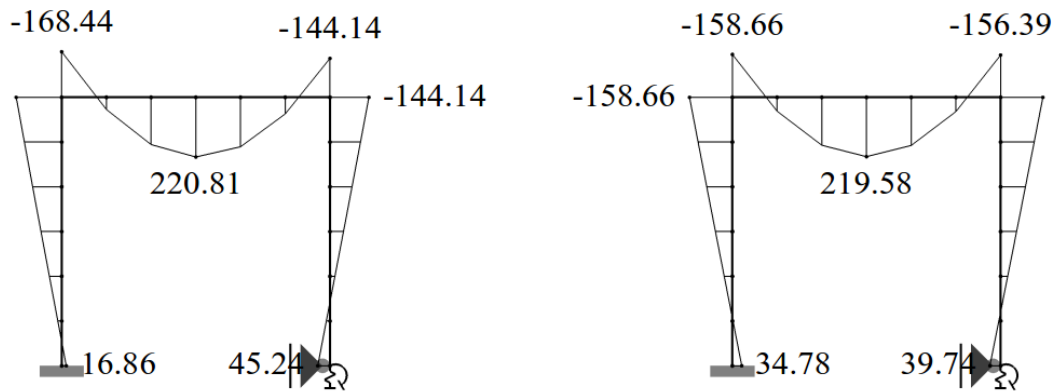
aikaisemmin 12,4 kNm, joka on suhteessa maksimiin 6,5 %. Pidemmälle jänteelle vaihteluväli on 10,4 kNm eli 3,4 % suhteessa maksimiin. Jännevälän kasvattaminen tuottaa siis lähes puolet alhaisemman momentin suhteellisen vaihteluvälin.



Kuva 4. Momenttikuvaajat pidemmällä jännevälillä: vasen 14,2 mm ja oikea 7,2 mm painumaerolla

Epävarmuuden välittymiseen vaikuttaa rakenneosien hoikkuuksien lisäksi niiden reunaehdot, joita ovat osien väliset liitokset ja tukiehdot. Esimerkiksi painuva tuki on mallinnettu kiertojäykäksi mitä se ei käytännössä ole. Ensinnäkin maaperä ei jousta pelkästään pystysuunnassa, vaan sen päälle rakennettu perustus pääsee myös kiertymään momentin vaikuttaessa. Lisäksi rakennuksen liitos perustukseen ei ole koskaan täysin kiertojäykkä. Näiden joustavuuksien huomioiminen tuottaa globaalisti löysemmän rakennemallin, mikä kuten todettua vaikuttaa epävarmuuden välittymiseen.

Kuva 5 sisältää momentin vaihteluvälit, kun tuella on pystysuuntaisen jäykkyyden lisäksi kiertymäjäykkyys. 80 kN/m viivakuormalla tuki kiertyy noin 1,7 mrad. Alkuperäisessä tapauksessa vasemman nurkan momentin suhteellinen vaihteluväli oli 6,5 %, ja nyt 5,8 %, eli jäykkyyden vähennyksellä on tässäkin tapauksessa epävarmuuden välittymistä alentava vaikutus.



Kuva 5. Momenttikuvaajat kiertymäjoustavuuden huomioimisen jälkeen: vasen kuva 10,8 mm ja oikea 5,5 mm painumaerolla. Painuvan tuen kiertymä on vasemmalla kehällä 1,8 mrad ja oikealla 1,6 mrad.

Näissä esimerkeissä tutustuttiin kuormituksesta riippumattomaan maaperän epävarmuuden välittymiseen. Kuormasta riippumattomuus tarkoittaa, että kaikki laskennallisen painuman epävarmuus johtuu jäykkyysparametreista. Tavallisesti tukireaktion aiheuttama pohjapaine yksinkertaistetaan tasan jakautuneeksi, jolloin painumalaskelma ja määritetty maajousi sisältävät myös kuorman mallinnuksesta aiheutuvaa epävarmuutta. Näillä esimerkeillä pyrittiin havainnollistamaan, kuinka maaperän painumakäyttäytymisen luoma epävarmuus siirtyy rakenteen sisäisille voimille, ja selventämään epävarmuuden välittymistä. Samalla esiteltiin olennaisimpia epävarmuuden välittymiseen vaikuttavia rakenteen ominaisuuksia. Nämä summattiin kahdeksi tekijäksi: rakenneosien hoikkuus (materiaali ja geometria) ja reunaehdot (liitokset).

3.2 Rakenteen toiminnallinen aksiaalijäykkyys

Edellisen esimerkin pilari ja maajousi muodostavat sarjaan kytketyn jousen. Rakenteen, eli tässä tapauksessa pilarin, toiminnallinen aksiaalijäykkyys lasketaan kaavalla:

$$\frac{EA_{pl}}{H_k} = \frac{33GPa * 1500cm^2}{6m} = 825MN/m \quad (3.1)$$

Esimerkin tapauksessa toiminnallisen aksiaalijäykkyyden ja maajousen jäykkyyden suhde on:

$$\frac{825}{23} = 35,87 \quad (3.2)$$

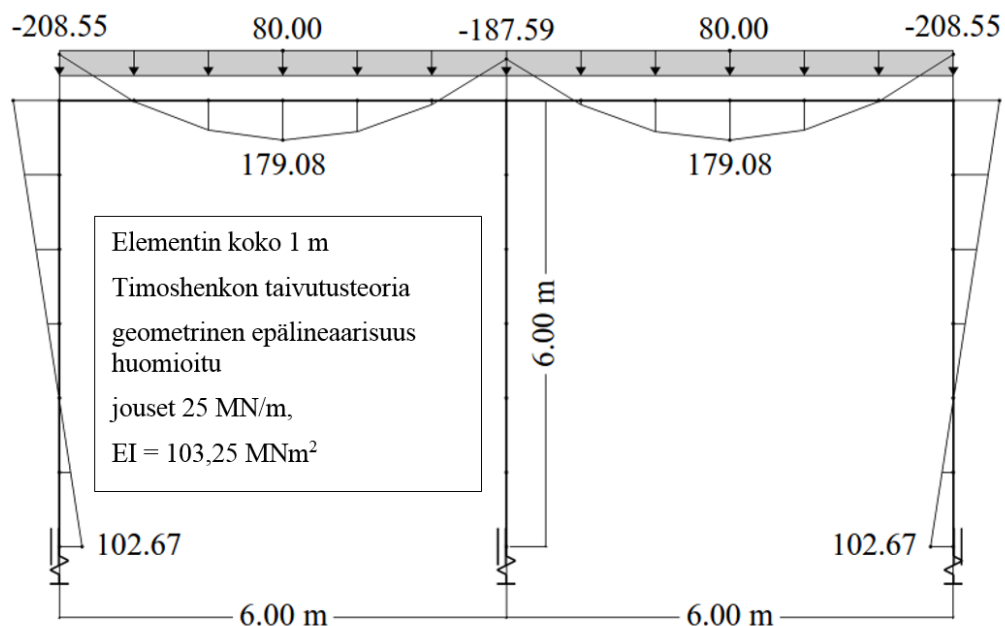
Koska sarjaan kytkettyjen jousien jäykkyys lasketaan kaavalla (Salmi 2005, s. 329):

$$\left(\sum \frac{1}{k_i}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{825}\right)^{-1} = 22,38 \left(\frac{MN}{m}\right) \quad (3.3)$$

niin havaitaan suurenkin jäykkyyseron vaikuttavan huomattavasti systeemin kokonaisjäykkyyteen. Vaikka pilarin toiminnallinen jäykkyys on yli 35-kertainen suhteessa maajouseen, niin systeemin kokonaisjäykkyys laskee 2,7 % maajousen alkuperäisestä jäykkyydestä. Korkeilla rakennuksilla ja pystyrakenteen aksiaalijäykkyyden vaihdellessa tämä tulisi huomioida rakenteiden epätasaisen painumisen laskennassa. Pystyrakenteiden aksiaalijäykkyyksien erot voivat kasvaa merkittäviksi korkeilla rakennuksilla, koska tavallisesti rakennuksen keskiosassa sijaitsee kuilurakenteita, joiden puristusjäykkyys on merkittävästi suurempi kuin reuna-alueiden pilareiden.

3.3 Ääriarvotarkastelun haasteet

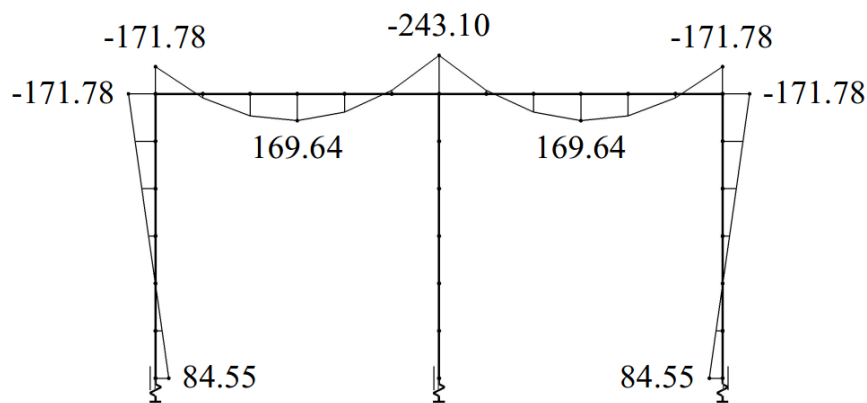
Tarkastellaan seuraavaksi kaksiaukkoista tasokehää, jonka kaikki kolme tukea ovat joustavalla maaperällä eikä siis kalliolla. Rakenteen alueelle oletetaan samat maaperäominaisuudet sekä painuvan kerroksen paksuus. Toisin sanoen tukien pystysuuntaisella jäykkyydellä on sama vaihteluväli ja sama keskiarvo. Tässäkin tapauksessa geotekninen suunnittelija on määrittänyt perustuksille painuman ääriarvot, joten voidaan laskea kaikki kahdeksan tapausta ja poimia kriittisimmät sisäiset voimat. Edellä painuvia tukia oli yksi ja tutkittavia tapauksia kaksi, mutta kolmella painuvalla tuella ääriarvojen yhdistelmiä muodostuu kahdeksan. Kuva 6 ei sisällä mitään näistä yhdistelmistä vaan tapauksen, jossa tuilla on jäykkyyden keskiarvo.



Kuva 6. Tasokehän momenttikuvaaja: tuet reunoilla painuvat 11 mm ja keskellä 21 mm

Tässä esimerkissä oletetaan maajousien olevan kuormituksesta riippumattomia. Oletus ei ole realistinen, ja esimerkiksi keskituella, joka kerää enemmän kuormaa, jousen tulisi olla jäykkyydeltään eri kuin reunatuilla, vaikka maaperäominaisuudet ovatkin laskennallisesti samat. Maajousen jäykkyyteen vaikuttaa tukireaktion suuruus, koska maaperän kokoonpuristuma riippuu jännitystasosta. Tätä asiaa käsitellään myöhemmin luvussa 5. Näiden lisäksi painumia ja maajousia määritettäessä tulisi huomioida kuormituksen alueellinen vaihtelu. Esimerkiksi alueelliset huiput pohjapaineessa kasvattavat painuman epälineaarisuutta vaikuttaen tuloksen epävarmuuteen. Määritetty maajousen jäykkyys sisältää kuorman aiheuttamaa epävarmuutta erityisesti silloin, kun epäsymmetrinen pohjapaineen jakauma yksinkertaistetaan tasan jakautuneeksi.

Yksi kahdeksasta maaperän jäykkyyshdistelmästä on asettaa keskituella yläarvo (30 MN/m) ja reunoille ala-arvot (20 MN/m). Kaikkien yhdistelmien tutkiminen paljastaa tämän tuottavan suurimman negatiivisen momentin palkin keskituella (Kuva 7).



Kuva 7. Tasokehän momenttikuvaaja kriittiselle tukien pystysuuntaisten jäykkyyksien yhdistelmälle

Tämän kaltainen mitoitusilanne, jossa tukien joustavuuksille asetetaan ääriarvot ja näiden kriittisin mahdollinen kombinaatio, on epätodennäköinen, mutta ääriarvoanalyysillä tuloksia ei liitetä todennäköisyyksiin, eikä pystytä arvioimaan tapahtuman todennäköisyyttä numeerisesti. Tämä on deterministisen mitoituksen rajoite, joka voidaan ratkaista käsittelemällä lähtötietoja ja tuloksia satunnaismuuttujina. Voidaan siis mitoittaa palkin keskituki $243,10 \text{ kNm}$ momentille ääriarvotarkasteluun perustuen, mutta tilastolliseen todennäköisyyteen perustuvalla suunnittelulla olisi mahdollista liittää tulokset todennäköisyyksiin edellyttäen, että jousitukien lähtötiedot ovat satunnaismuuttujia.

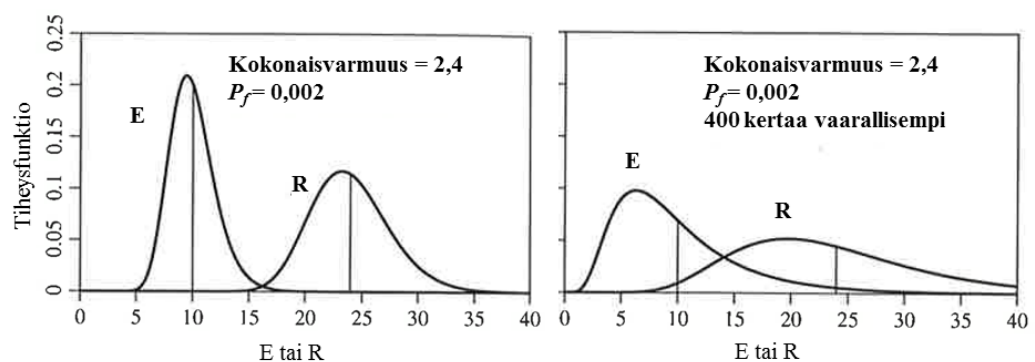
Ääriarvotarkastelun toinen haaste on kriittisten sisäisten voimien löytäminen, sillä yhdistelmien lukumäärä on kaksi potenssiin pistemäisten tukien lukumäärä, mikä tarkoittaa useita kymmeniä tuloksia käsiteltäväksi, jopa satoja suuremmilla rakennemalleilla.

4 Luotettavuuteen perustuva suunnittelu

Tässä luvussa tutustutaan *luotettavuuteen perustuvaan suunnitteluun (RBD)*. Kirjallisuudessa tälle käytetään myös nimitystä *luotettavuusanalyysi* (Nykyri 2015). Työssä tutkittava epävarmuuden hallinnan metodiikka ei ole luotettavuusanalyysi, koska kuormia ja rakenneosien kestävyyskäsitteitä käsitellään deterministisen suunnittelun tapaan varmuuskertoimilla ja kuormitusyhdistelmillä. Metodiikka sisältää kuitenkin *RBD*:lle ominaisia piirteitä, eli suurta laskentakapasiteettia hyödyntäviä satunnaisilmiöitä ja todennäköisyyslaskentaa.

4.1 Taustaa

Lähtötietojen epävarmuutta rakennesuunnittelussa on mahdollista hallita luotettavuusanalyysillä (Nykyri 2015). Normien mukaisen rajatilasuunnittelun varmuuskertoimet perustuvat luotettavuusanalyysiin, mutta laskentatehon saatavuuden kehittyttyä analyysijä voidaan suorittaa jopa yksittäisille kohteille korvaten normien mukaisen osavarmuuksilla suunnittelun. Menetelmä poikkeaa deterministisestä suunnittelusta hyväksymällä lähtötietojen epävarmuuden, ja johtamalla sen tuloksille. Luotettavuusanalyysissä vaihteluvälin lisäksi lähtötiedoille muodostetaan todennäköisyysjakauma, jolloin myös tuloksia voidaan käsitellä satunnaismuuttujina todennäköisyyslaskennan menetelmin. Sekä kestävyys että kuorman vaikutus muotoillaan satunnaismuuttujiksi, jolloin niille voidaan sovittaa jakauma kuten kuvassa 8 on tehty. Visuaalisesti todetaan suunnitelman olevan sitä luotettavampi mitä vähemmän kuvan käyrät leikkaavat toisiaan. Leikkaava alue kuvaa vaurioitumista eli tilannetta, jossa kuorman vaikutus on suurempi kuin kestävyys. Kummassakin tapauksessa kokonaisvarmuus eli jakaumien keskiarvojen (pystyviivojen) suhde on sama, mutta vaurioitumistodennäköisyys (P_f) poikkeaa merkittävästi.



Kuva 8. Kuorman vaikutuksen (E) ja kestävyysjakaumat kahdessa tapauksessa, joissa kokonaisvarmuus on sama (muokattu: Fenton & Griffiths 2008, s. 256)

Luotettavuusperusteista suunnittelua ei tavallisesti käytetä rakennesuunnittelussa, koska mitoituksen riittävä luotettavuus muodostetaan Eurokoodin mukaisia osavarmuuskertoimia ja

tapauskohtaista harkintaa käyttämällä. Aspin (2014) mukaan *RBD*:a on käytetty siltasuunnittelussa, kun on pyritty tarkempaan mitoitukseen kuin tavanomaiset suunnittelunormit kykenevät. Toisin sanoen sillä voidaan perustella rakenteen täyttävän vaatimukset, vaikka niin ei voitaisi osoittaa normien tavanomaisia ohjeita seuraamalla. Nykyri (2015) on hyödyntänyt *RBD*:a teollisuusrakenteen mitoituksen kipeiden kohtien löytämiseen, kuten esimerkiksi olennaisimpien lähtötietojen tunnistamiseen, ja niiden epävarmuuden vaikutusten arvioimiseen.

4.2 Menetelmän periaate

Luotettavuusanalyysissä epävarmuutta sisältäviä lähtötietoja käsitellään jatkuvina *satunnaismuuttujina*. Satunnaismuuttuja sisältää joukon alkioita, joista jokainen on liitetty todennäköisyyteen. Alkioiden ja todennäköisyyksien yhdistelmät esitetään *tiheys-* tai *kertymäfunktioilla*. Tiheysfunktioita kutsutaan myös *todennäköisyysjakaumaksi* tai vain *jakaumaksi* (Mellin 2008).

Jotta rakenteiden mitoitus voidaan perustaa todennäköisyyksiin, niin epävarmuutta sisältävät lähtötiedot muotoillaan satunnaismuuttujiksi. Koska kyseessä on numeerinen malli luotettavuuden arviointiin, täytyy lähtötiedot muotoilla jakaumiksi, joilla määritetään todennäköisyysmassan jakautuminen arvojen vaihteluvälillä. Tuloksiin päästään käsiksi seuraavalla menettelyllä, jota kutsutaan myös *Monte Carlo -simulaatioksi (MCS)*:

1. Valitaan satunnainen otos lähtötietojen jakaumilta
2. Lasketaan malli ja tallennetaan tulokset
3. Toistetaan n kertaa
4. Käsitellään tulokset

Rungon suunnittelun kontekstissa mallilla tarkoitetaan rakennemallia ja sen tulokset ovat kyseisen kuormitusyhdistelmän aiheuttamia siirtymiä sekä sisäisiä voimia. Tulosten käsittely on prosessissa erillisenä kohtanaan, sillä simulaatio tuottaa suuren määrän dataa, jonka käsittely vaatii tilastollisen analyysin suorittamisen. Arvioitaessa *MCS*:n yksittäisen tulostoukon luotettavuutta suhteessa sille asetettuun vaatimukseen muodostetaan *yhteisfunktio* (Asp 2014, s. 41; SFS-EN 1990+A1+AC 2006, s. 146). Tälle käytetään myös nimitystä *marginaalifunktio* (Tanttu & Löfman 2016, s. 13) tai *rajatilafunktio* (Nykyri 2015, s. 39).

$$g = R - E \quad (4.1)$$

missä

g	yhteisfunktio (satunnaismuuttuja)
R	vaatimus (satunnaismuuttuja tai yksittäinen arvo)

E kyseisen kuormitusyhdistelmän vaikutus tarkasteltavaan suureeseen (satunnaismuuttuja)

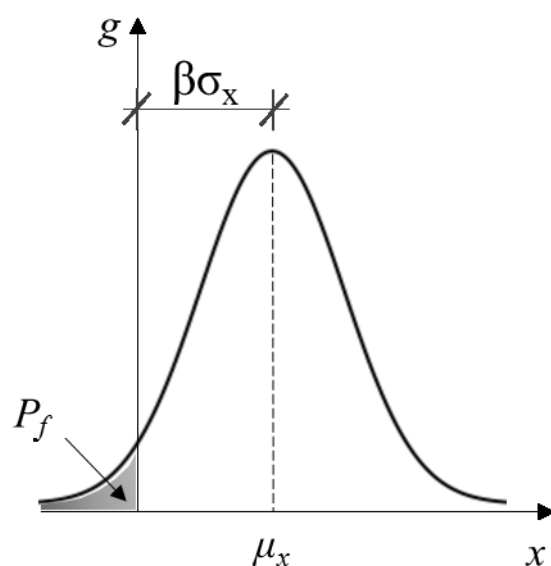
Käyttörajan analyysissä R vastaa tavallisesti vaatimusta, kun taas murtorajatilassa kestävyyttä, joka edelleen voidaan esittää satunnaismuuttujana yksittäisen arvon sijaan. Vaatimuksen alittamisen todennäköisyys (*vaurioitumistodennäköisyys*) on yksinkertaisesti nollaa pienempien arvojen suhde kaikkiin simuloitaviin arvoihin, joita on siis n kappaletta (SFS-EN 1990+A1+AC 2006, s. 146).

$$P_f = P(g < 0) \quad (4.2)$$

Monte Carlo -tyyppisellä luotettavuusanalyysillä laskettuun vaurioitumistodennäköisyyteen vaikuttaa simulaation otoskoko ja otantamenetelmä. Pienellä määrällä simulaatioita vaurioitumistodennäköisyys vaihtelee merkittävästi identtisten analyysien välillä, joten laskentoja tulisi tehdä suhteellisen suuri määrä. Yksiselitteistä ohjeistusta on haastavaa antaa, koska tuloksen konvergointinopeus suhteessa otoskokoon riippuu monesta tekijästä. Tarvittavaan laskentojen lukumäärään suhteessa vaadittuun tarkkuustasoon vaikuttavat ainakin laskentamallin yhtälöt, satunnaismuuttujien lukumäärä ja simulaation otantamenetelmä.

4.3 Luotettavuusindeksi

Yhteisfunktion luotettavuutta arvioidaan *luotettavuusindeksillä*. Indeksillä kuvaa kuinka kaukana yhteisfunktion joukko on nollasta, eli mitä suurempi indeksin arvo on, sitä alhaisempi on vaurioitumistodennäköisyys. Jos yhteisfunktio on normaalijakautunut, niin luotettavuusindeksi on joukon keskiarvon etäisyys nollasta mitattuna keskihajontoina (Kuva 9).



Kuva 9. Normaalijakautuneen yhteisfunktion luotettavuusindeksi (muokattu: Asp 2014, s. 56)

Taulukko 1 sisältää luotettavuusindeksin tavoitearvoja normin opastavasta liitteestä. Arvot pätevät ainoastaan luotettavuusluokan kaksi (RC2) rakenneosille. Normissa esitetään myös muita luotettavuusluokkia vastaavat arvot murtorajatilassa (SFS-EN 1990+A1+AC 2006, s. 138).

Taulukko 1. Luotettavuusindeksin β tavoitearvoja luokan RC2 rakenneosille (muokattu: SFS-EN 1990+A1+AC 2006, s. 148)

Rajatila	Luotettavuusindeksin tavoitearvo	
	1 vuosi	50 vuotta
Murtorajatila	4,7	3,8
Käyttörajatila	2,9	1,5

Esimerkiksi luotettavuusindeksin arvo 2,32 vastaa yhden prosentin vaurioitumistodennäköisyyttä olettaen yhteisfunktio normaalijakautuneeksi. Mikäli luotettavuusanalyysin lähtötietoja on käsitelty varmuuskertoimilla, niin yhteisfunktio yliarvioi vaurioitumistodennäköisyyttä. Luotettavuusindeksin tavoitearvo laskee käyttöiän kasvaessa koska kuormien ääriarvojen esiintymistodennäköisyys on suurempi pidemmällä aikavälillä (Asp 2014, s. 47). Indeks ei ole yksiselitteinen vaan tapauskohtainen. Tapauskohtainen laskelma on tehtävä, kun yhteisfunktio ei ole normaalijakautunut, eli luultavasti useimmissa luotettavuusanalyyseissä. Kehittyneempää menettelyä luotettavuusindeksin laskentaan ei selitetä normin opastavassa liitteessä. Laskenta on selitetty esimerkiksi Nykyrin (2015, s. 44-47) diplomityössä. Luotettavuusindeksissä ei huomioida inhimillisiä virhelähteitä (SFS-EN 1990+A1+AC 2006, s.

148). Täten ei tulisi ajatella, että RBD vähentää insinöörin harkinnanvaraista riskienhallintaa ulkopuolisten virhelähteiden, kuten toteutusteknisten virheiden suhteen. Toisaalta näitä epävarmuuden lähteitä voidaan sisällyttää luotettavuusanalyysin, mikäli ne on mahdollista esittää satunnaismuuttujina.

4.4 Satunnaisotoksen muodostaminen

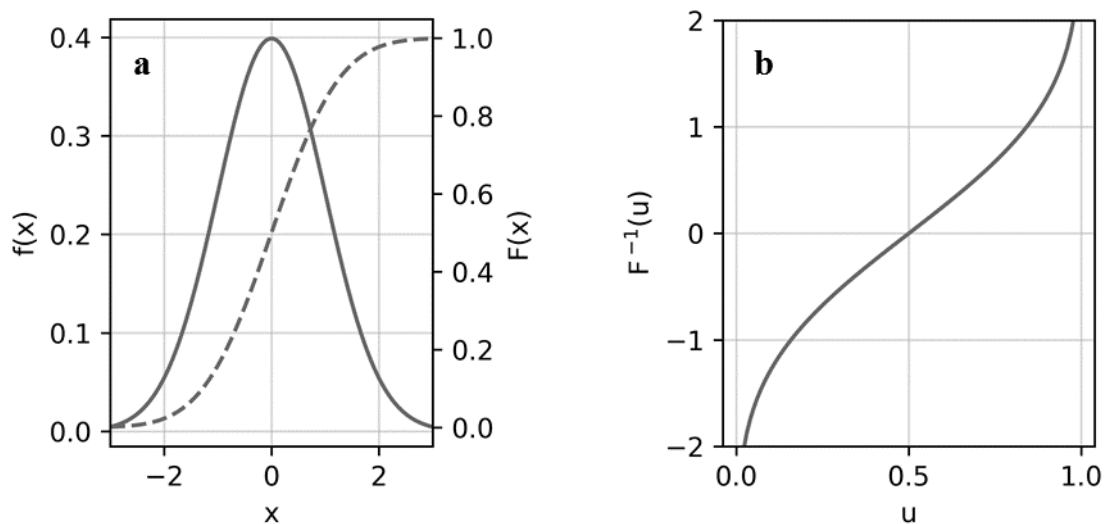
Luotettavuusanalyysi perustuu saman laskelman toistamiseen lukuisia kertoja satunnaisilla lähtötiedoilla. Lähtötietojen otanta on tärkeä osa luotettavuusanalyysiä vaikuttaen laskelman kokonaisuikaan suhteessa asetettuun laskennalliseen tarkkuustasoon. Otantaa voidaan ohjata huomioimaan lähtötietojen välinen korrelaatio, mitä tämän työn esimerkkilaskelmissa ei tehdä. Yksinkertaisin otantamenetelmä on *satunnaisotanta*. Nimensä mukaisesti jokainen arvo valitaan täysin satunnaisesti. Tässä työssä käytettävä otantamenetelmä luokitellaan *ositetuksi otannaksi (stratified sampling)*. Tämän ymmärtämiseksi palataan vielä Monte Carlo -simulaation prosessiin. Otannassa valitaan satunnainen todennäköisyyden arvo väliltä $[0,1]$, ja tätä vastaava lähtötiedon arvo. Nämä kaksi yhdistetään toisiinsa kertymäfunktion käänteisfunktioilla. Prosessin matemaattinen merkintä on kuten alla.

$$x = F^{-1}(u) \quad (4.3)$$

missä

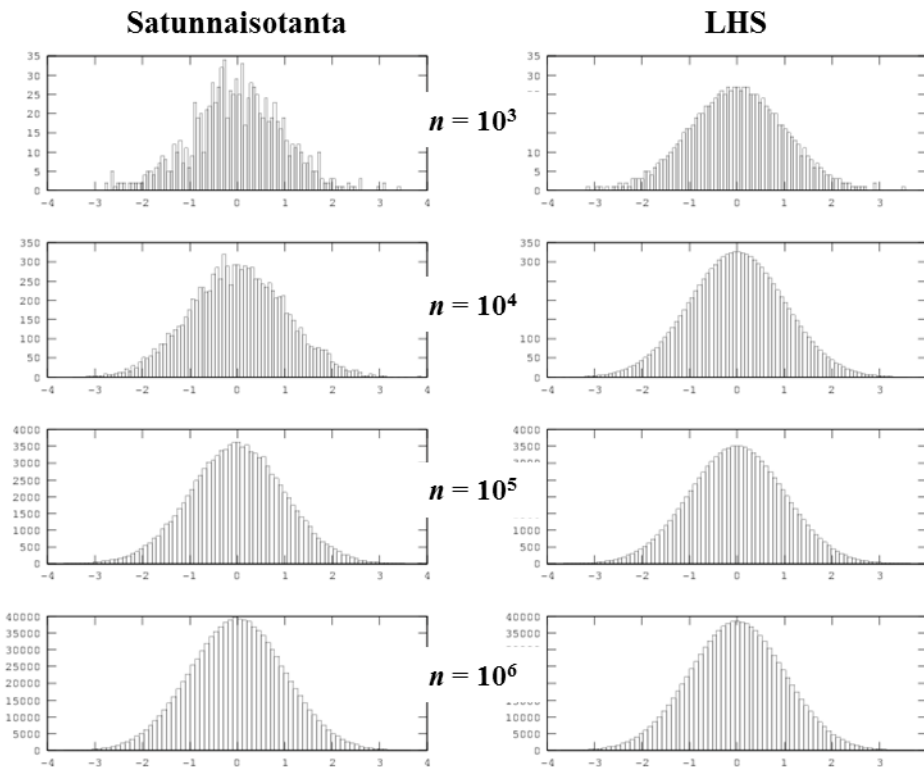
x	satunnaismuuttujan arvo (lähtötieto)
F^{-1}	lähtötietojakauman kertymäfunktion käänteisfunktio
u	otantamenetelmällä valittava todennäköisyyden arvo

Tavallisesti jakaumat esitetään tiheysfunktiona. Kuvassa 10a on normaalijakautunut tiheysfunktio ja sen kertymäfunktio. Kertymäfunktio laskee arvoon x asti kertyneen todennäköisyysmassan ja on siis tiheysfunktion integraalifunktio. Kertymäfunktion käänteisfunktio puolestaan laskee todennäköisyyttä vastaavan muuttujan arvon (Kuva 10b). Käänteisfunktio on välttämätön kehitettäessä luotettavuusanalyysin algoritmia, sillä otos muodostetaan muuttamalla lista todennäköisyyksiä diskreetiksi otokseksi.



Kuva 10. a: Tiheysfunktio (jatkuva viiva) ja kertymäfunktio (katkoviiva). b: Kertymäfunktion käänteisfunktio

Ositetussa otannassa satunnaismuuttujan arvon valinta suoritetaan sananmukaisesti vain osittain satunnaisesti. Ositettuja otantamentelmiä on useita, joista tässä esitellään *LHS* (*Latin hypercube sampling*). *LHS*:ssä todennäköisyyksien lähtöjoukko $[0,1]$ jaetaan osaväleihin ja kultakin väliltä valitaan yksi satunnainen arvo. Näin koko jakauma tulee paremmin katetuksi verrattuna satunnaisotantaan, jossa erityisesti pienillä otoksilla alkioden hajonta voi olla epäsäännöllinen. Luotettavuusanalyysin sisältäessä enintään kaksi satunnaismuuttujaa *LHS*-otanta vaatii vähemmän laskentoja saman tarkkuustason saavuttamiseksi verrattuna satunnaisotantaan (Chrisman 2014). Menetelmä on myös vakaampi eli simulaatioiden välillä tulokset eivät vaihtelee yhtä paljon kuin satunnaisotannalla (Helton & Davis 2003, s. 60). Käytännön etuna on mahdollisuus lyhentää simulaation laskenta-aikaa pitämällä kuitenkin vastaava tarkkuustaso kuin täysin satunnaista otantaa käytettäessä. Kuva 11 havainnollistaa *LHS*-otannan edullisuutta simuloitaessa hyvin pieniä otoksia (tuhat alkioita) ja menetelmien yhtäläistä tarkkuutta suurella otoskoolalla (miljoona alkioita). Pieni otoskoko havaitaan täysin satunnaisen otoksen ”rypästymisenä” kun taas *LHS* muodostaa otokselle määrätyn muotoisen histogrammin.



Kuva 11. Täysin satunnaisella ja LHS:llä simuloitujen histogrammien visuaalinen ero suhteessa otoskokoan (muokattu: Rudd 2015)

LHS:n periaate usean muuttujan tapauksessa on alla olevan mukainen.

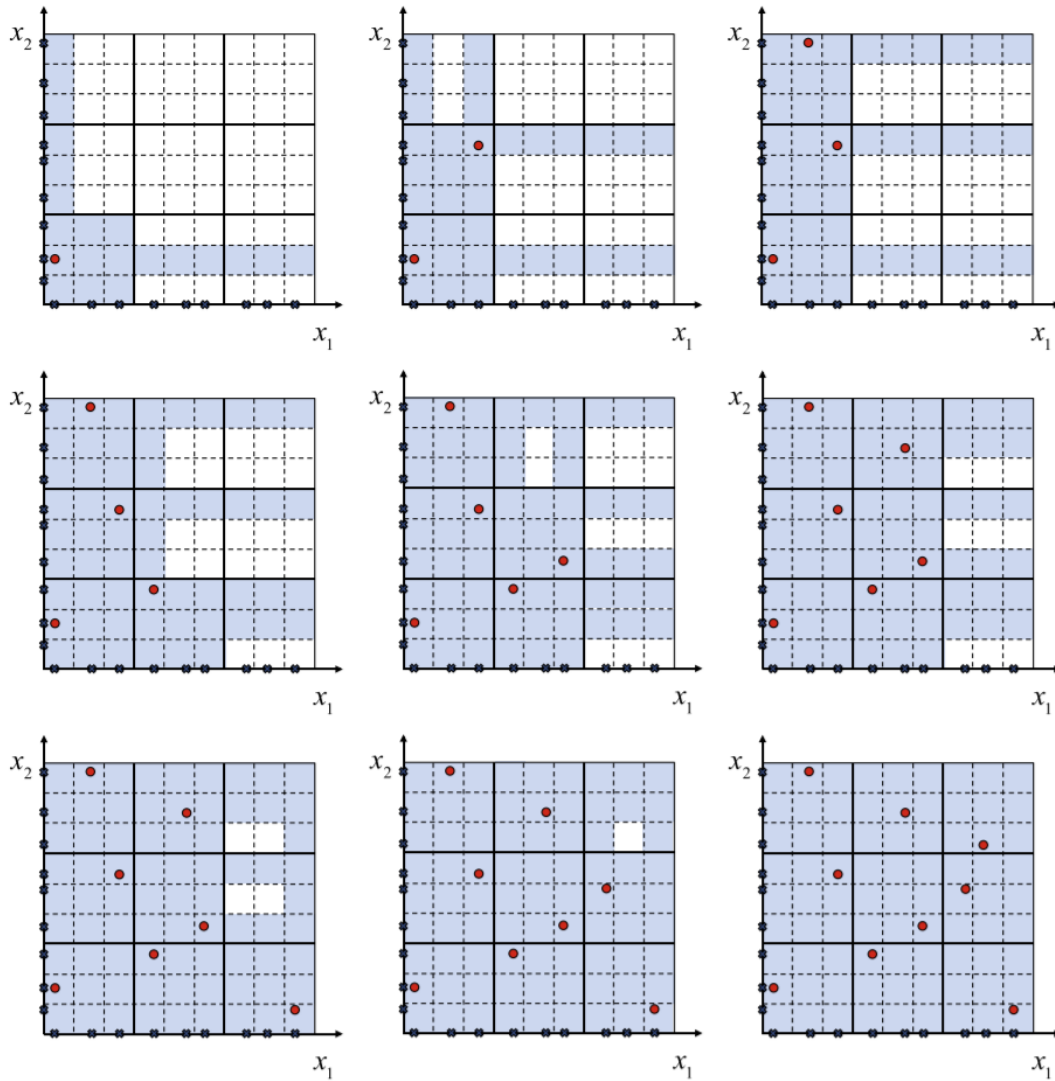
1. Päättää kuinka suuri otos kunkin satunnaismuuttujan x_i jakaumasta kuvataan, eli muuttuja n
2. Muodostaa vektori \mathbf{u}_o satunnaisia todennäköisyyksien arvoja osaväleiltä (n alkia)
3. Yhdistää edellisen kohdan satunnaisarvot muuttujan x_i arvoihin kertymäfunktion käänteisfunktioilla: $x_i = F^{-1}(u_i)$
4. Suorittaa edelliset kaikille satunnaismuuttujille x_i , $i = 1 \dots j$
5. Muodostaa otosmatriisi \mathbf{X}_o , jossa vektoreiden alkiot on yhdistetty satunnaisesti

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} x_{1.5} & \dots & x_{j.3} \\ x_{1.9} & \dots & x_{j.7} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1.n} & \dots & x_{j.n} \end{bmatrix}$$

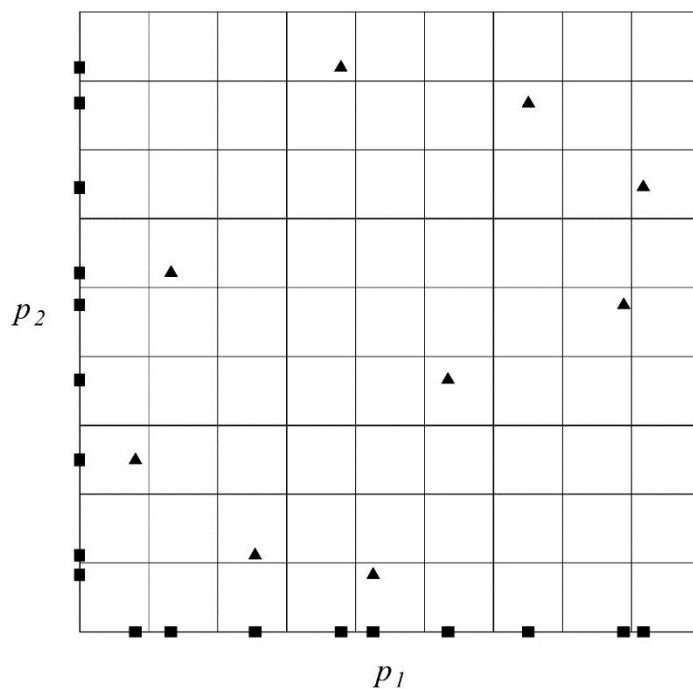
missä

j luotettavuusanalyysin satunnaismuuttujien lukumäärä

LHS-otantaa voidaan ohjata vielä systemaattisemmin jakamalla otosavaruus kerroksiin. Ku-
vassa 12 sisältää esimerkin kaksikerroksisen otannan etenemisestä kahdella muuttujalla eli
kun $j = 2$. Kuvan esimerkissä satunnaismuuttujien jakaumat on jaettu yhdeksään osaan ($n =$
9) ja ylätasolla kolmeen osaan, jolloin pisteet jakautuvat yksikerroksista otantaa tasaisem-
min. Tavallisessa *LHS*:ssä ainoa rajoite on, että jokaisesta rivistä ja sarakkeesta saa olla vain
yksi näyte (Kuva 13), jolloin rypästen muodostuminen on yleisempää.



Kuva 12. Kaksikerroksisen *LHS*:n eteneminen kahdella satunnaismuuttujalla (Shields &
Zhang 2016, s. 104)



Kuva 13. Tavallinen LHS-otannan hajontakaavio: ■ kuvaa yksittäisen satunnaismuuttujan todennäköisyyden arvoa p_i ja ▲ näiden satunnaisia yhdistelmiä

Osittaisen otannan optimoinnista on olemassa tutkimuksia, mutta niiden syvälinen ymmärtäminen ja implementointi vaativat vahvaa matemaattista osaamista. Otantamenetelmien vertailussa LHS:ä tarkempi ja laskennallisesti edullisempi menetelmä on QMC (*Quasi-Monte Carlo*) -menetelmä, jossa hyödynnetään Sobolin sekvenssejä (Kucherenko et al. 2015, s. 27). Otantamenetelmät ovat vain pieni yksityiskohta kokonaisuutta vaikkakin niiden syvällisempi ymmärtäminen on tärkeää ratkaisumallin jatkokehityksessä.

Luvun **Error! Reference source not found.** esimerkkilaskelmassa LHS -tyyppistä otantaa muutetaan hieman määritelmänsä mukaisesta. Kutsutaan muokattua periaatetta *osittain satunnaiseksi otannaksi*. Tässä käänteiselle kertymäfunktiolle ohjattavat todennäköisyydet valitaan lähtötietojakauman osaväleiltä systemaattisesti. Tämä vaihe muodostaa yksittäisen lähtötietomuuttujan otoksen, eikä siihen sovelleta minkään asteista satunnaisuutta. Otannan satunnaisuus ilmenee muodostettaessa lähtötietomuuttujien otosavaruus. Otosavaruus koostaan LHS-menetelmän tapaan yhdistämällä satunnaiset alkiot kultakin lähtötietomuuttujalta.

5 Maaperän jäykkyysparametrien epävarmuus rungon suunnittelussa

5.1 Maaperän jäykkyysparametrit

Jäykkyysparametreilla tarkoitetaan *kimmomoduulia* (E), jota kutsutaan myös *kimmokertoimeksi*, ja *Poissonin lukua* (ν), jota kutsutaan myös *suppeumakertoimeksi*. Kimmomoduuli määritellään jännityksen ja sen suuntaisen venymän suhteena. Poissonin vakio puolestaan määritellään jännityksen suuntaisen ja sitä vastaan kohtisuoran venymän suhteena. Poissonin luku vaihtelee materiaalista riippuen välillä 0 – 0,5. (Salmi & Pajunen 2010, s. 29-30, 39-40)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (5.1)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

Maaperän tapauksessa jäykkyysparametria kimmomoduuli kutsutaan *muodonmuutosmoduuliksi*. Karkearakeisten maiden muodonmuutosmoduuli voidaan mitata levykuormituskokeella tai pudotuspainolaitteella. Levykuormituskokeessa maata vasten puristetaan pyöreää halkaisijaltaan 30 cm levyä nostaen kuormitusta portaittain. Pudotuspainokoe puolestaan vaatii huomattavasti kevyemmän laitteiston, ja sitä käytetään tavallisesti tarkoituksena tarkistaa tiivistystöiden laatu. (Jääskeläinen 2011, s. 138-139)

Suomessa maaperän kokoonpuristuvuuden laskentaan käytetään tavallisesti *kokoonpuristusmoduulia* tai *tangenttimoduulia*. Näitä voidaan mitata laboratoriossa tehtävällä *ödometrikokeella*. Kokeessa maanäytettä puristetaan sylinterissä eli sivusuuntainen muodonmuutos on estetty, eikä sivusuuntaisia jännityksiä mitata. Kokoonpuristusmoduuli on jännitys – venymä -käyrän kulmakerroin tietyllä jännityksellä suhteessa alkutilaan, kun taas tangenttimoduuli on kulmakerroin lasketulla jännitystasolla. Toisin sanoen tangenttimoduuli on muodonmuutuskäyrän derivaatta ja vaihtelee jännitystasosta riippuen. Maaperän jäykkyysparametreja voidaan arvioida suurpiirteisesti myös kairaustulosten, vesipitoisuuden ja rakeisuusmittausten perusteella. (Jääskeläinen 2011)

Tässä työssä maaperän jäykkyysparametrien arvioimiseen käytetään taulukkoa 2, joka tarjoaa painumalaskennan vaatimia lähtötietoja kairaustuloksiin perustuen. Taulukon olennaisin lähtötieto painumalaskennan jännitys – muodonmuutosmenetelmää käytettäessä on moduuliluku (m), jolle esitetään maalajikohtaiset vaihteluvälit. Vaihtoehtoisesti lähtötietoja voidaan arvioida taulukosta 3, joka listaa keskimääräisen muodonmuutosmoduulin arvoja suhteessa kairaustuloksiin. Kun lähtötietona on muodonmuutosmoduuli, niin painumalaskenta suoritetaan sovelletulla kimmomenetelmällä. Taulukon 3 parametrit ovat varovaisia

keskiarvoja (Tielaitos 1999, s. 9). Tilastollisia menetelmiä varten tiedon tulisi olla keskiarvoina. Varovainen keskiarvo on jonkinlainen ala-arvo, mutta ei kerro tarkemmin montako prosenttia tuloksista jää arvon alle.

Taulukko 2. Kairausvastukseen perustuva lujuus- ja muodonmuutosparametrien arviointi soralla ja moreenilla (Liikennevirasto 2017, liite 6)

Maalaji		Tilavuuspaino (kN/m ³) pohja-vedenpinnan		Kitkakulma (°)	Janbun yhtälön muodonmuutosparametri		Kairausvastus		
		Yläpuolella	Alapuolella		Moduulilukum	Jännityksen eksponentti β	Puristin-kairaus q _c (MPa)	Painokai-raus Pk/0,2 m	Heijari-kai-raus L/0,2 m
Sora	Löyhä	17 ... 19	10 ...	34	300 ... 600	0,5	< 5,5	10 ... 25	5 ... 10
	Keskitiivis			37	400 ... 800	0,5	5,5 ... 12	25 ... 50	10 ... 20
	Tiivis	18 ... 20	12	40	600 ... 1200	0,5	> 12	> 50	> 20
Moreeni	Hyvin löyhä	16 ... 19	10 ... 12	... 34	(≤100) * 300 ... 600	0,5	< 10	< 40	< 20
	Löyhä	17 ... 20	10 ... 12	... 36	(100...250)* 600 ...	0,5	> 10	40 ... 100	20 ... 60
	Keskitiivis	18 ... 21	11 ... 13	... 38	800 ...	0,5	-	> 100	60 ... 140
	Tiivis	19 ... 23	11 ... 14	... 40	1200 ...	0,5	-	Lyömällä	> 140

Taulukko 3. Muodonmuutosmoduulin arvioiminen kairausvastukseen perustuen (Tielaitos 1999, s. 9)

Suhteellinen tiivisyys	Heijari-kairaus N ₂₀ (L/0,2 m)	Puristin-kairaus q _c (MPa)	Paino-kairaus 1) NHT (pk/0,2 m)	SPT-kairaus 3) N ₃₀ (L/0,3 m)	Kitkakulma 2) (ast.)	Muodonmuutosmoduuli E _d (MPa)
Hyvin löyhä	< 5	< 2,5	< 10	< 4	29 - 32	< 10
Löyhä	3 - 10	2,5 - 5,0	10 - 30	4 - 10	32 - 35	10 - 20
Keskitiivis	8 - 17	5,0 - 10,0	20 - 50	10 - 30	35 - 37	20 - 30
Tiivis	12 - 36	10,0 - 20,0	40 - 90	30 - 50	37 - 40	30 - 60
Hyvin tiivis	> 30	> 20,0	> 80	> 50	40 - 45	60 - 90

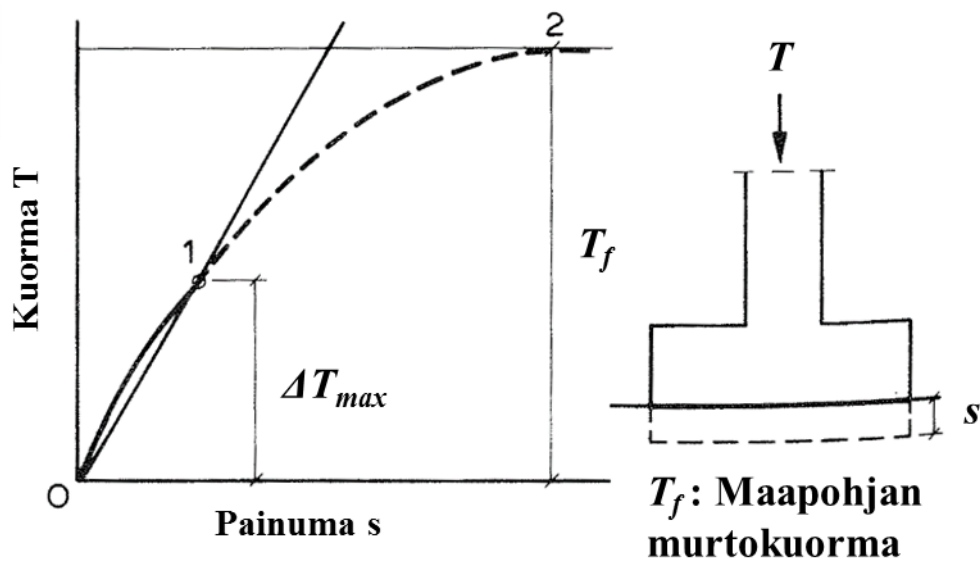
5.2 Maaperän muodonmuutosten arvioiminen

Tässä työssä keskitytään arvioimaan suhteellisen jäykkien maalajien muodonmuutostähtäytymisen epävarmuutta. Rakennuksia ei tavallisesti perusteta heikosti kantavien maalajien kuten saven varaan. Lisäksi näiden maalajien muodonmuutosten arvioiminen on haastavaa

vahvan aikariippuvuuden takia. Aikariippuvuuksia ei tavallisesti huomioida rakennusten stabiliteettilaskennassa. Laskennallisesti karkearakeisten maalajien painuma tulisi määrittää joko *alkupainumana* tai *konsolidaatiopainumana* (Jääskeläinen 2011, s. 122). Konsolidaatiopainuman laskennassa käytetään lähtötietona esimerkiksi tangenttimoduulia, ja alkupainuman laskennassa muodonmuutosmoduulia. Tässä työssä painumalaskentaa esitellään *jännitys – muodonmuutosmenetelmällä*, joka perustuu muuttuvan tangenttimoduulin käyttöön. *Sovelletussa kimmomenetelmässä* painuma lasketaan perustuen arvioon maaperän muodonmuutosmoduulista (RIL 207-2009, s. 239).

Lujuusopissa palautuvia muodonmuutoksia kutsutaan kimmoisiksi ja pysyviä plastisiksi. Ilmiö *konsolidaatio* on näihin verrattavissa, sillä se on jossain määrin näiden välimuoto. Maaperän konsolidoituminen on pysyvää muodonmuutosta kuten plastinen, mutta suuruusluokaltaan pientä kuten kimmainen. Konsolidaatio ei aiheudu maa-aineksen komponenttien muodonmuutoksista, vaan niiden välisten huokostilojen pienentymisestä (Jääskeläinen 2011, s. 121). Perustuksen painumaa karkearakeisella maa-alustalla kutsutaan myös *välittömäksi painumaksi* (RIL 207-2009, s. 112). Karkeiden maalajien painumakäyttäytymisessä ei voi erottaa alkupainumaa konsolidaatiopainumasta samalla tavalla kuin esimerkiksi saven tapauksessa (Jääskeläinen 2011, s. 121).

Lujuusopin plastisia muodonmuutoksia kutsutaan maaperän tapauksessa *leikkausjännityksistä aiheutuviksi muodonmuutoksiksi*. Yksisuuntaiseen muodonmuutostilaan perustuva tangenttimoduulimenetelmä ei huomioi leikkausmuodonmuutoksista aiheutuvaa painumaa. Tangenttimoduulimenetelmää on kuitenkin perusteltua käyttää, mikäli jännitykset maapohjassa oletetaan alhaisiksi. Korhonen (1985, s. 366) suosittelee rajaksi 0,3...0,5 kertaa murtokuorman arvoa, jota havainnollistaa piste 1 kuvassa 14.



Kuva 14. Esimerkki painuman lineaarisoinnista suurimpaan sallittuun kuormaan (muokattu: Korhonen 1985, s. 368)

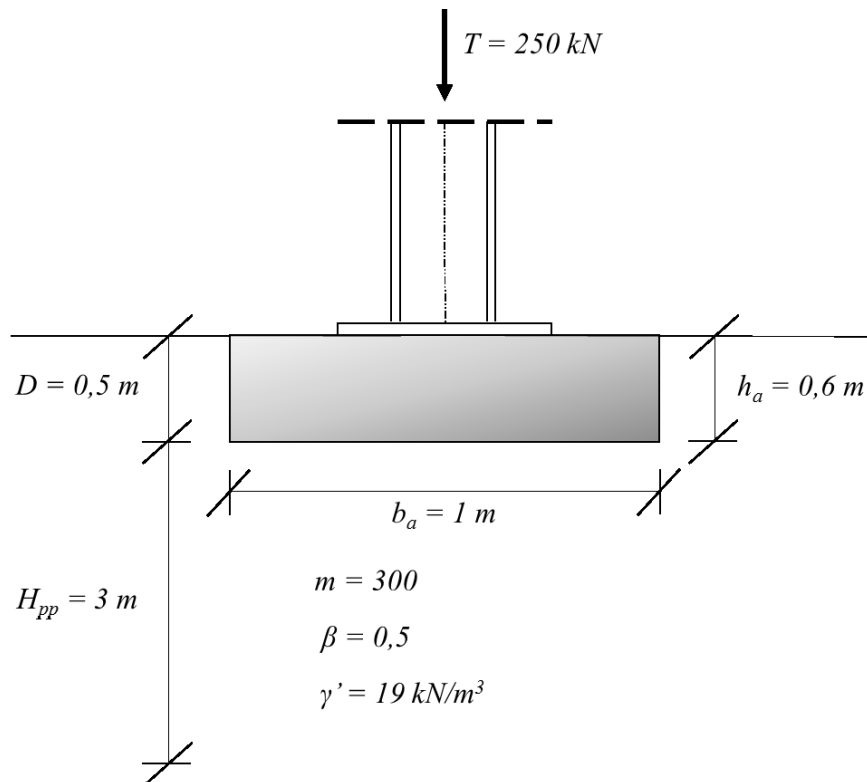
Painuman epälineaarisuus kasvaa lähestyttäessä maapohjan murtoa kuten kuvasta 14 havaitaan. Perustusten kantokestävyyttä mitoittaessa ei kuitenkaan sallita suuria pohjapaineita lähellä murtoa. Mitoituksessa varmuus luodaan pohjarakennussuunnittelun Eurokoodin mukaisilla osavarmuuskertoimilla. Rakennuksen murtorajatilan kuormien aiheuttamat jännitykset maapohjassa voidaan olettaa mataliksi suhteessa maapohjan murtokestävyyteen. Tällä oletuksella painumakäyttäytyminen on huomattavasti lineaarisempaa ja tapahtuu kuvan 14 pisteiden 0 ja 1 välillä

5.3 Maaperän jäykkyyttä kuvaavat parametrit rakennesuunnittelussa

Rakennetekniikan laskentamalleissa maapohjan joustavuutta mallinnetaan tavallisesti jousilla. *Alustaluku* on laatan eli pintaelementin jousivakio. Tässä työssä käsitellään pistemäisiä tukia, jotka mallinnetaan yksittäisellä jousella. Yksittäisen jousielementin jousivakio määritetään kuorman ja tätä vastaavan painuman suhteena, eli termiä *alustaluku* ei varsinaisesti tarvitse käyttää pistemäisiä tukia käsiteltäessä. Tämän työn aihe käsittelee maaperän jäykkyyssparametrien epävarmuuden hallintaa. Epävarmuus on peräisin maaperän ominaisuuksien tuntemisen suurpiirteisyydestä, mikä johtaa edellä kuvattujen parametrien kuten moduuliluvun epävarmuuteen. Rakennesuunnittelija ei tavallisesti tunne geotekniikan parametreja, vaan on kiinnostunut mallissaan käytettävien jousien jäykkyyksistä.

5.3.1 Epävarmuuden välittyminen jousivakiolle painumalaskennan kautta

Suoritetaan esimerkkilaskelma jännitys – muodonmuutosmenetelmällä (tangentialmoduulimenetelmä) kuvan 15 pilarianturalle. Kairausten perusteella maaperä on löyhää soraa, jolle arvioidaan laskennassa käytettävä maan moduuliluku taulukosta 2. Jännityseksponentti on tavallisesti 0,5. Parametrit soveltuvat Janbun (1970) mukaisen tangentialmoduulimenetelmän lähtötiedoiksi mutta eivät ole varsinaisia jäykkyysparametreja vaan laskentamallin käyränsovitusparametreja.



Kuva 15. Esimerkin lähtötiedot

Painuma lasketaan yhdessä pisteessä neliöanturan keskipisteen alla olettaen pohjapaine tasan jakautuneeksi. Perustuksen ja kuorman aiheuttama jännityksen lisäys syvyyden funktiona määritetään yksinkertaistetulla yhteydellä.

$$\Delta\sigma_z = \frac{T}{(b_a + z)^2} \quad (5.3)$$

missä

T	pystysuuntainen voima ja anturan omapaino
b_a	anturan sivumitta
z	syvyys anturan alapinnasta mitattuna

Kaava (5.3) perustuu jännitysten jakautumiseen syvyysuunnassa kahden suhteessa yhteen. Varsinaisessa laskennassa jännitysten jakautumista tulee arvioida tarkemmalla approksimaatiolla kuten esimerkiksi Boussinesqin teorialla. Laskelma tulee lisäksi tehdä anturan merkitsevän pisteen suhteen eikä keskipisteen suhteen kuten tässä esimerkissä. (Jääskeläinen 2011, s. 148-159)

Painumalaskennassa määritetään ensin maaperän kerrokset ja niiden muodonmuutosparametrit. Tässä tapauksessa on yksi maakerros, joka jaetaan laskennassa ohuempiin kerroksiin tuloksen tarkentamiseksi. Yksittäisen kerroksen kokoonpuristuma voidaan määrittää esimerkiksi tangentialmoduulimenetelmän yhtälön mukaan (Janbu 1970, s. 178). Kaavalla laskettu painuma perustuu yksisuuntaiseen jännitystilaan, eikä huomioi maakerrosten leikkausmuodonmuutoksista aiheutuvia painumia.

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{m\beta} \left[\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_v} \right)^\beta - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_v} \right)^\beta \right] \quad (5.4)$$

missä

ε	maakerroksen kokoonpuristuma
m	Tangenttimoduulimenetelmän moduuliluku
β	Tangenttimoduulimenetelmän jännityseksponentti
σ_z	pystysuuntainen jännitys maakerroksen keskellä (sisältää sekä maasta että kuormasta aiheutuvan komponentin)
σ_v	Tangenttimoduulimenetelmän referenssijännitys (100kPa)
σ_0	Yläpuolisesta maa-aineksesta aiheutuva jännitys kerroksen keskellä

Tässä analyysissä jännityseksponentti pidetään vakiona, ja tavallisesti sille käytetään karkearakeisilla maalajeilla arvoa 0,5. Tällöin kaava (5.4) yksinkertaistuu muotoon (Jääskeläinen 2011, s. 133)

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} = \frac{2}{m} \left(\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_v}} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_v}} \right) \quad (5.5)$$

Kokonaispainuman laskemiseksi kaavalla (5.5) laskettu arvo kerrotaan kerrospaksuudella ja nämä summataan yhteen. Jännitysten jakautumisen takia kerrosten painuma pienenee nopeasti kuten tässäkin esimerkissä, joten kerroksen kokoonpuristumaa lasketaan vain kolmen metrin syvyyteen. Painumalaskennan voi lopettaa syvyydellä, jolla tehokkaan pystysuuntaisen jännityksen lisäys on 20 % maakerroksen aiheuttamasta jännityksestä (RIL 2009, s. 112).

Laskelmassa jako tehdään yhtä paksuihin kerroksiin. Optimaalisempaa olisi sijoittaa ohuita kerroksia lähelle perustusta ja kasvattaa kerrospaksuutta syvemmällä.

Laskelman mukaan antura painuu 250 kN kuormalla 7,5 mm, mikä muutetaan rakennemallin jousivakioksi 33,3 MN/m.

5.4 Epävarmuuden luokittelu

Insinööritieteissä mikään todellisuutta kuvaava malli ei ole eksakti vaan sisältää epävarmuutta. Rakennesuunnittelussa epävarmuus tulee pystyä hallitsemaan riittävän tarkasti, jotta yleisesti hyväksytty luotettavuuden vähimmäistaso ylittyy. Epävarmuuden lähteet jaotellaan *aleatoriseen* ja *episteemiseen*. Aleatorinen epävarmuus on luontaista epävarmuutta, jota mallista ei voida poistaa. Tätä kutsutaan myös fysikaaliseksi epävarmuudeksi. Esimerkiksi puun lujuusominaisuudet vaihtelevat, joten lujuuslaskelma sisältää tietyn määrän epävarmuutta riippuen esimerkiksi puun laadusta. Episteeminen epävarmuus kattaa kaiken muun mallin sisältämän epävarmuuden. Voidaan ajatella sen johtuvan tiedon puutteellisuudesta tarkoittaen mallin epäkehittyneitä kykyä kuvata todellisuutta ja mallin lähtötietojen puutteellisuutta. (Kiureghian & Ditlevsen 2007; Asp 2014)

Tämän tutkimuksen keskiössä on maaperän jäykkyyden luontaisesta vaihtelusta aiheutuvan epävarmuuden hallitseminen suunnittelussa. Toisin sanoen tutkitulla metodiikalla pyritään mahdollistamaan lähtötiedon, eli tässä tapauksessa maaperän joustavuuden, fysikaalisen epävarmuuden huomioiminen rakennelaskelman tuloksissa. Metodiikka itsessään sisältää useita episteemisiä virhelähteitä, joiden minimoiminen on tässä tutkimuksessa sivuosassa. Tilastolliset menetelmät kuten esimerkiksi luotettavuusanalyysi sisältävät rajallisesta otoksesta aiheutuvan virheen, jota voidaan pienentää kasvattamalla otoskokoa tai kehittämällä matemaattista mallia. Esimerkiksi laskentojen lukumäärästä on useita mainintoja tässä työssä, koska se on tällä hetkellä metodiikan käytettävyyden kannalta kriittinen tekijä. Haaste on kuitenkin tämän työn näkökulmasta toteutustekninen ongelma, sillä se on ratkaistavissa tietokoneisiin käytettäviä resursseja kasvattamalla. Toisin sanoen malli itsessään ei ole puutteellinen kuvaamaan todellisuutta edellyttäen, että sille sallitaan hyvin pitkä laskenta-aika, mikä ei ole käytännössä mahdollista rakennesuunnittelun kontekstissa.

5.5 Käyttö- ja murtorajatilan tarkasteleminen

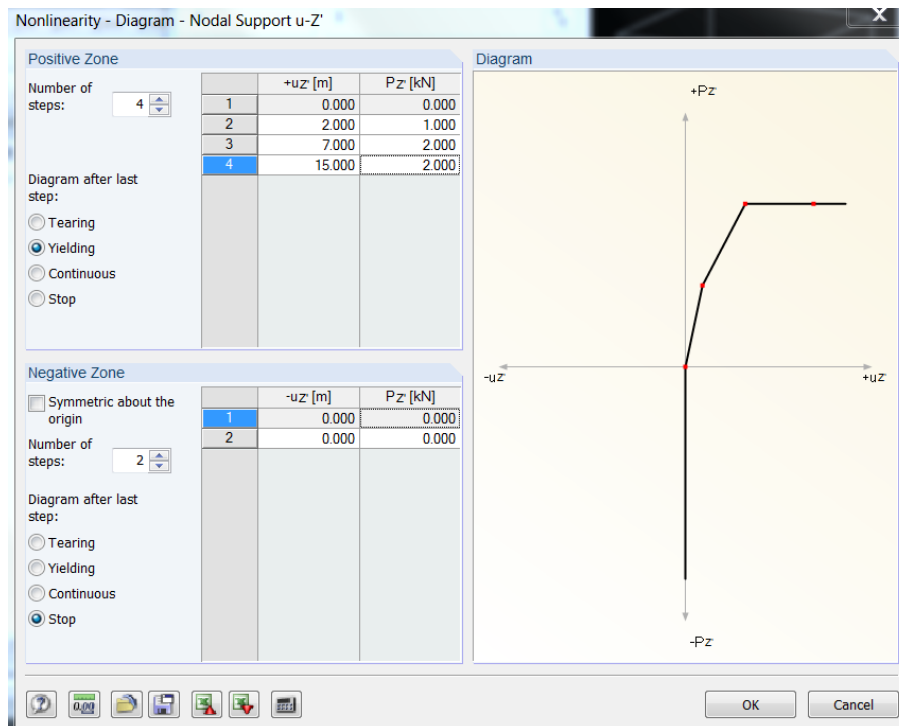
Maaperän jäykkyyssparametrien epävarmuus välittyy rakennuksen rungon suunnitteluun perustusten painumien kautta. Jos perustukset koko rungon alueella painuvat **tasaisesti**, niin ongelmia voi aiheutua liittyville rakenteille kuten putkille. Perustusten **epätasainen** painuminen aiheuttaa rungon osien kiertymistä ja kallistumista. Käyttörajatilan suunnittelussa sekä tasainen että epätasainen painuma on epäedullista. Nämä voivat aiheuttaa esimerkiksi esteettisiä haittoja kuten halkeilua tai ongelmia rakenteen tiiveydessä. Myös rakennuksen

käyttötarkoitus ja siellä toimivat herkät laitteet voivat vaikuttaa sallittuihin muodonmuutoksiin käyttörajatilassa.

Murtorajatilassa tasainen ja mahdollinen epätasainen laskennallinen painuma ovat suurempia johtuen kuormien suuremmista mitoitusarvoista suhteessa käyttörajatilaan. Tasainen painuma voi tässäkin tapauksessa aiheuttaa vaurioita liittyville rakenteille. Onnettomuuden satuttaessa rakennuksesta poistuminen tulee turvata, eikä esimerkiksi kaasuputkien vaurioituminen ja mahdollinen räjähdysvaara ole suotavaa. Epätasaiset painumat ja rakenneosien kiertymät aiheuttavat edellä kuvattujen haittojen lisäksi lisäjännityksiä kantavissa rakenteissa, mikä voi aiheuttaa murtorajatilan ennustettua pienemmillä kuormilla. Geoteknisessä luokassa kolme suositellaan huomioimaan lisäjännitysten vaikutukset rakennesuunnitteluun (RIL 2009, s. 57). Toisin sanoen lisäjännitysten aiheuttama luotettavuuden menetys tulisi tunnistaa ja kompensoida mitoituksessa. Toisaalta betonirakenteiden Eurokoodissa korostetaan, että painumaerojen vaikutukset huomioidaan ainoastaan käyttörajatilassa. Mikäli rakenneosien sitkeys ja kiertymiskyky ovat riittäviä, niin painumaeroja ei tarvitse tavallisesti huomioida. Stabiiliustarkasteluissa painumaerojen vaikutusten huomioiminen voi tulla kyseeseen, jolloin painumaerojen vaikutus lisätään pysyvänä kuormana (SFS-EN 1992-1-1+A1+AC 2015, s. 23). Eurokoodin suunnitteluperusteiden mukaan kaikille tuille lasketaan todennäköinen painuma, johon lisätään tai vähennetään epävarmuuden huomioiva termi niin, että saavutetaan mitoitukselle kriittinen kuormitusyhdistelmä (SFS-EN 1990+A1+AC 2006, s. 100).

5.6 Maaperän joustavuus FEM-laskennassa

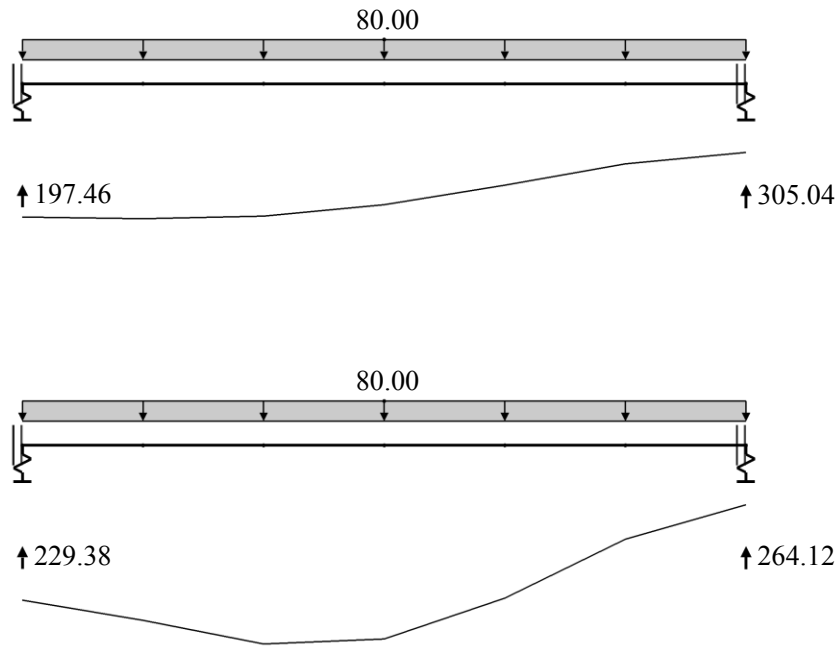
Analysoitaessa rakennusten siirtymiä ja sisäisiä voimia käytetään tavallisesti tietokoneavusteista elementtimenetelmää (*FEM*). Perustusten joustavuutta voidaan näissä ohjelmistoissa mallintaa jousielementeillä. Yksinkertaisissa tapauksissa tai FEM-laskentojen suuruusluokan tarkistuksessa voidaan käyttää käsinlaskentaa kuten sauvarakenteiden siirtymämenetelmää. Jotta jäykkyysparametrien epävarmuus perustuksen joustavuuteen voidaan huomioida, täytyy epävarmuus siirtää jousen jäykkyydelle. Tavallisesti rakennetekniikan sovelluksien tarpeisiin riittävät lineaariset jousielementit, joille annetaan lähtötiedoiksi jousivakio eli jousen jäykkyys. Maaperän painumakäyttäytyminen on aina jossain määrin epälineaarista. Osassa kaupallisia FEM-ohjelmistoja voi määrittää epälineaarisia jousia. Tässä työssä on käytetty *Dlubal RFEM5* -ohjelmistoa, jonka jousielementille voi määrittää useita jäykkyyksiä ja niitä vastaavat voiman raja-arvot. Kuvassa 16 on määritetty jouselle kaksi eri jäykkyyttä ja myötöraja. Jos maaperän epälineaarinen painumakäyttäytyminen tunnetaan, niin tätä ominaisuutta hyödyntämällä se voidaan mallintaa rakenneteknisessä laskennassa useiden jousivakioiden lineaarikombinaationa. Tämän työn laskentaesimerkeissä ei kuitenkaan käytetä epälineaarisia jousia.



Kuva 16. Dlubal RFEM5 -ohjelmiston jousen voima – siirtymä käyttäytymisen määrittäminen

5.6.1 Maaperän ja rakenteen välinen vuorovaikutus

Jousien käyttäminen rakennemallissa huomioi rakenteen jäykkyyden vaikutuksen tukireaktioiden tasaantumiseen. Painumattomilla tuilla tukireaktiot ovat vakiot, mutta jousituilla reaktiot muuttuvat perustusten epätasaisen painuman edetessä. Yksittäisen tuen painuessa muita enemmän tukireaktio tällä tuella pienenee ja tasapainon säilymiseksi muilla vastaavasti kasvaa. Edellytyksenä on rakenteen riittävä jäykkyys tai muuten tukireaktiot tasaantuvat. Joustava rakenne ei vastusta muodonmuutoksia, joten jäykemmällä alustalla olevat tuet eivät kannattele löysempiä tukia, mikä johtaa tukireaktioiden tasaantumiseen. Tätä ilmiötä havainnollistetaan kuvassa 17. Palkit ovat päistään jäykästi tuettuja, vaikka tukimomentteja ei kuvassa esitetä. Alapuolinen palkki on huomattavasti löysempi, mikä havaitaan myös taipumaviivan muodosta. Tällä palkilla tukireaktiot tasaantuvat enemmän verrattuna jäykempään palkkiin.



Kuva 17. Kahden jäykkyydeltään eriävän pystysuuntaisilla jousilla päistään tuetun palkin tukireaktiot ja muodonmuutos: kiinnitä huomiota jäykän (ylhällä) ja löysän palkin eriävään tukireaktioiden tasaantumiseen

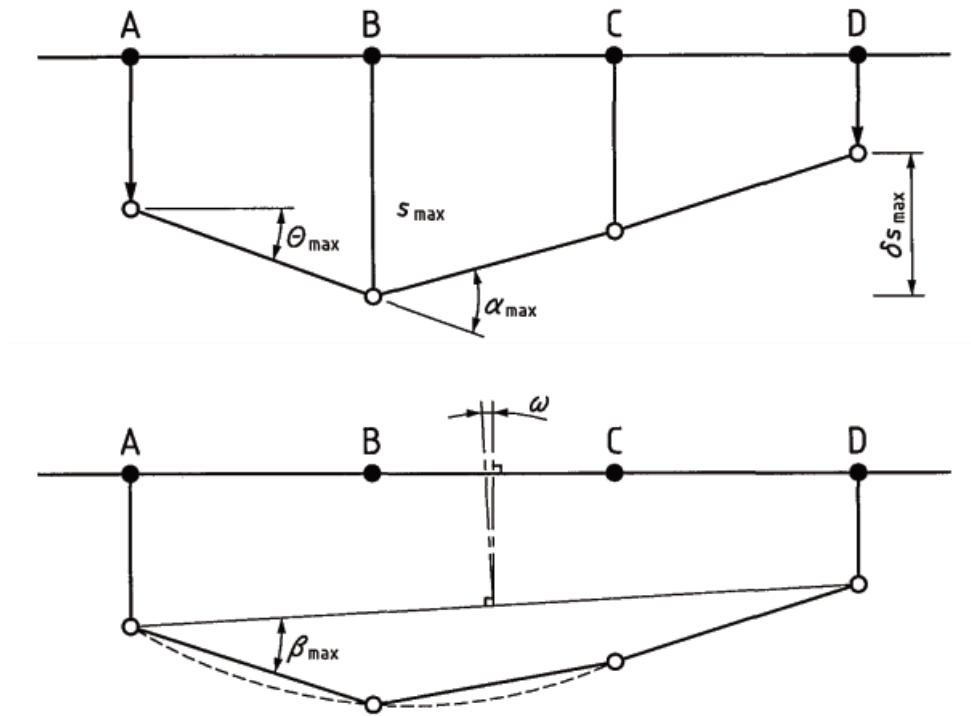
Kuvan 17 palkit painuvat laskennallisesti epätasaisesti vähemmän huomioitaessa tukireaktioiden jakautuminen verrattuna tilanteeseen, jossa painumalaskenta suoritettaisiin jäykkien tukien reaktioilla. Tavallisesti maaperän ja rakenteen yhteiskäyttäytymisestä aiheutuvaa tukireaktioiden tasaantumista ei huomioida, sillä sen hyödyt jäävät pieniksi ja huomiotta jättäminen on konservatiivista. Tarkemman analyysin hyödyt ovat merkittävämmät riippuen rakenteen jäykkyydestä, mutta ei voi yleistää milloin analyysi tulisi tehdä tai jättää tekemättä. Voidaan kuitenkin sanoa tukireaktioiden jakautuvan voimakkaammin jatkuvien paikallavalettujen rakenteiden kuin esimerkiksi betonielementtirakenteiden tapauksessa (RIL 209-2007, s. 113). Suunnittelijan tulisi tunnistaa tilanteet, joissa rakenteen ja maaperän yhteiskäyttäytymisen analyysi on merkittävä epätasaisen painuman laskennassa. Yhteiskäyttäytymisen huomioiminen tapahtuu iteratiivisen ja melko työlään analyysin kautta. Lisätyötä voidaan perustella, jos laskennalliset painumaerot kasvavat liiallisiksi, koska iteratiivinen laskelma vähentää suunnitelman konservatiivisuutta. Saavutettava hyöty nähdään luultavimmin perustamistavassa tai perustuksen mitoissa.

Myös betonirakenteiden Eurokoodi ohjeistaa huomioimaan tukireaktioiden jakautumisen, mikäli rakenne on jäykkä. Koko perustusjärjestelmän ollessa hyvin jäykkä painumaeroja ei tarvitse huomioida ja tukireaktiot voidaan määrittää jousittamattomalta rakennemallilta. Eurokoodin liitteessä G ohjeistetaan tarkistamaan rakennejärjestelmän jäykkyys numeerisesti

ja perustelemaan siirtymättömmän mallin käyttöä tällä tavoin. (SFS-EN 1992-1-1 2015, s. 207)

5.7 Painumaeroja koskevat suositukset

Eurokoodissa määritellään painumien aiheuttamat siirtymät kuvan 18 ja taulukon 4 mukaisesti (SFS-EN 1997-1 2015, s. 158-159).



Kuva 18. Painumien aiheuttamien siirtymien visualisointi ja merkinnät (SFS-EN 1997-1 2015, s. 158-159)

Taulukko 4. Kuvan 18 merkintöjen selitteet

Merkintä	Selite
s	painuma
δs	epätasainen painuma (painumaero)
θ	kiertymä
α	kulmanmuutos
ω	kallistuma
β	suhteellinen kiertymä (kulmakiertymä)

Painumien aiheuttamille rakenteen siirtymille ja kiertymille Eurokoodi antaa suurpiirteisiä ohjeita täsmentäen niiden koskevan vain tavallisia rakenteita (SFS-EN 1997-1 2015, s. 158). Toisin sanoen normin opastava liite ei tarjoa tarkkoja raja-arvoja suunnittelun tueksi, mikä

on hyvin perusteltua. Painumaerojen määrittäminen riippuu lukuisista tekijöistä, joten rakennukset täytyy käsitellä tapauskohtaisesti. Kansallisessa ohjeistuksessa arvoja on hieman tarkennettu ja jaoteltu rakennuksen jäykkyyden sekä materiaalin mukaan (taulukko 5).

Taulukko 5. Rakennusten kokonaispainumien ja kantavien rakenteiden kulmakiertymien suuntaa-antavia raja-arvoja (muokattu: RIL 2009, s. 57)

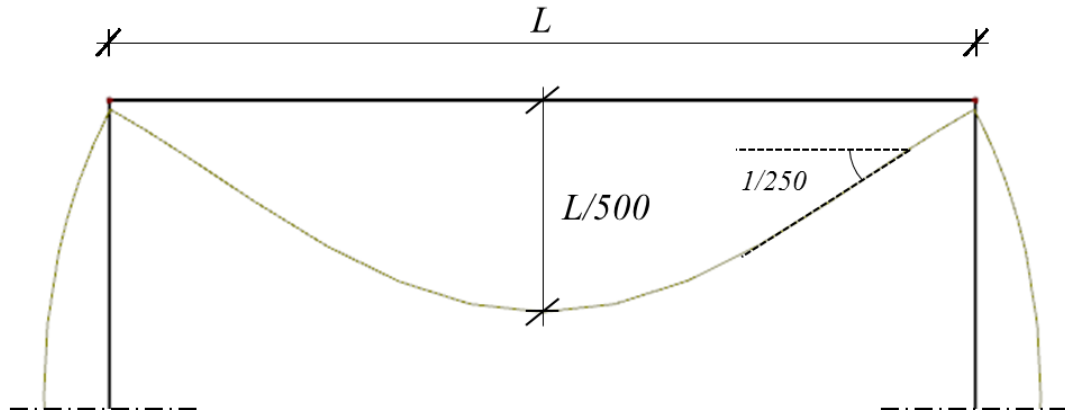
Rakennetyyppi	Kokonais- painuman raja-arvoja	Kulmakiertymien raja-arvojen vaihteluväli	
	[mm]	Karkearakeinen maapohja	Hienorakeinen maapohja
Massiiviset jäykät rakenteet	100	1/250...1/200	1/250...1/200
Staattisesti määrätty rakenteet	100	1/400...1/300	1/300...1/200
Staattisesti määräämättömät rakenteet			
- Puurakenteet	100	1/400...1/300	1/300...1/200
- Teräsrakenteet	80	1/500...1/200	1/500...1/200
- Muuratut rakenteet	40	1/1000...1/600	1/800...1/400
- Teräsbetonirakenteet	60	1/1000...1/500	1/700...1/350
- Teräsbetonielementtirakenteet	40	1/1200...1/700	1/1000...1/500
- Teräsbetonikehärakenteet	30	1/2000...1/1000	1/1500...1/700

Taulukossa asetetaan tiukemmat vaatimukset staattisesti määräämättömille rakenteille, mikä selittyy niiden jäykkyydellä. Staattisesti määräämättömät rakenteet ovat vakaampia ja jäykempiä, sillä ne sisältävät enemmän rakenneosia tai enemmän liikettä rajoittavia tukia. Sama trendi nähdään eri materiaalien välillä. Puurakenteille sallitaan suuremmat kulmakiertymät, sillä puun kimmomoduuli on alhaisempi kuin teräksen ja betonin. Lisäksi eri rakennetyyppien liitostekniikka vaikuttaa jäykkyyteen ja täten vaatimuksiin. Teräsbetonielementtirakenteet ovat joustavampia liitostensa takia verrattuna teräsbetonikehärakenteisiin, joiden liitokset ovat jäykempiä paikallavalamisen vuoksi.

Taulukon suositus kulmakiertymän raja-arvoksi esimerkiksi teräsbetonirakenteille on vaativa verrattuna Eurokoodin ja betonirakenteiden suunnittelu- ja mitoitusohjeeseen. Kokonaiskuorman aiheuttaman taipuman raja-arvoksi suositellaan Eurokoodissa arvoa $L/250$. Pysyvien kuormien vaikuttaessa suositellaan arvoa $L/500$. (Leskelä 2005, s. 328; SFS-EN 1992-1-1+A1+AC 2015, s. 126)

Verrattaessa betonirakenteiden suunnitteluohjetta ja geoteknistä suositusta (Taulukko 5) esimerkiksi yksiaukkoiselle kehälle, havaitaan kulmakiertymää vastaavan taipuman puolikas (Kuva 19). Kulmanmuutos oletetaan pieneksi ($\tan\varphi \approx \varphi$). Esimerkiksi paikallavaletulle

staattisesti määräämättömälle teräsbetonirakenteelle kulmakiertymän lievin vaatimus on geoteknisen ohjeistuksen mukaan $1/700$. Eurokoodi vaativin suositus olisi siis $1/250$. Tämän perusteella taulukon 5 suosituksiin tulisi suhtautua varauksella. Materiaali- ja projektikohtaiset ohjeistukset ovat luultavasti tarkempia.



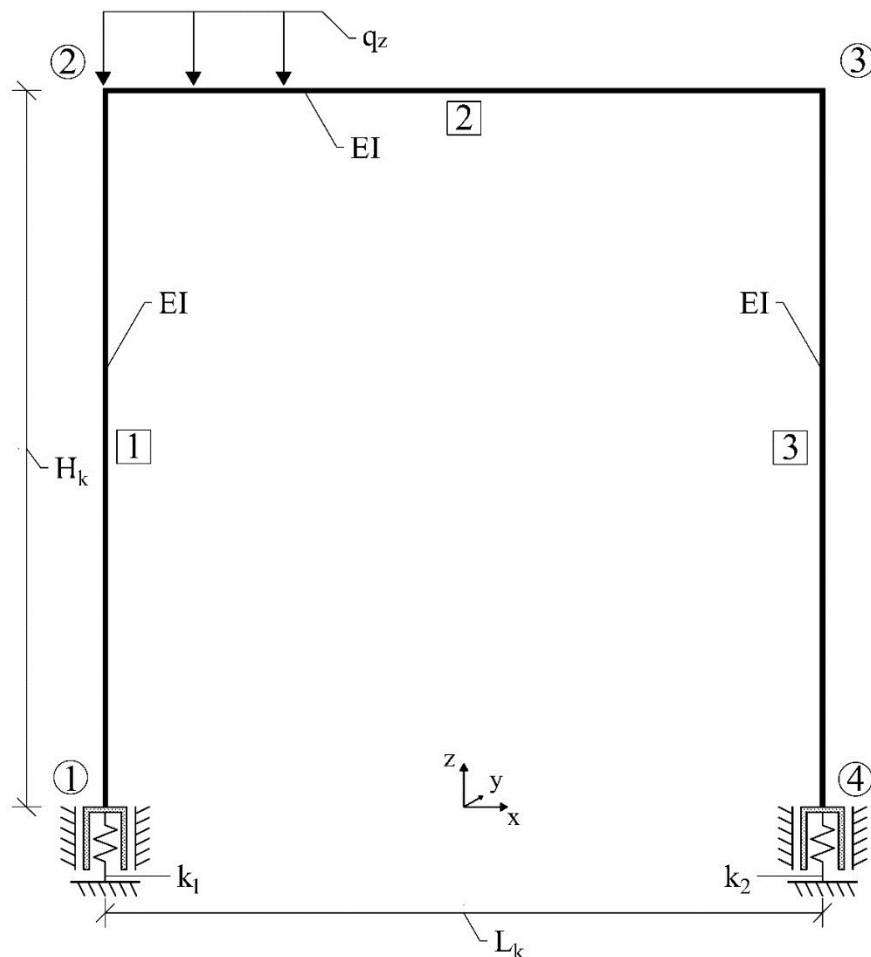
Kuva 19. Taipuma suhteessa kulmakiertymään

6 Epävarmuusanalyysi

Tässä luvussa esitellään ratkaisumetodiikka esimerkkien kautta. Laskennallisessa epävarmuuden hallinnassa, jota tässä työssä kutsutaan *epävarmuusanalyysiksi*, lähtötietojen epävarmuus johdetaan tuloksille, jolloin epävarmuutta hallitaan numeroin. Esimerkkien kautta havainnollistetaan lisäksi, kuinka tilasto- ja todennäköisyysmatematiikkaa hyödynnetään tulosten prosessoinnissa. Seuraavaksi esitellään kaksi erilaista kehärakennetta, joille ratkaisumetodiikkaa sovelletaan hieman eri tavoilla.

6.1 Rakennemalli ja materiaaliominaisuudet

Kuva 20 sisältää rakennemallin ja sen merkinnät. Tasokehä on jäykkänurkkainen ja perustusliitokset ovat pystysuunnassa jousitetut. Sauvoilla on sama taivutusjäykkyys ja palkille kohdistetaan tasan jakautunut pystykuorma.



Kuva 20. Jäykkäkantainen ja -nurkkainen pystysuunnassa jousitettu tasokehä. Merkinnät esitellään taulukossa 6.

Taulukko 6 sisältää lähtötiedot koskien geometriaa, kuormaa ja kehän materiaaliominaisuuksia. Jotta analysoitava rakenne olisi realistinen, tulisi sen mitoitus tarkistaa myös murtorajatilassa. Tässä tarkistusta ei tehdä, mutta geometrian suhde kuormaan on oikeaa suuruusluokkaa, sillä palkin taipuma on suositusta pienempi. Palkki taipuu noin 11 mm ja suhteessa jänneväliin tämä vastaa arvoa 1/546. Teräsrakenteiden Eurokoodin kansallisen liitteen tiukin taipumaraja on 1/400 koskien pääkannattajia (Ympäristöministeriö 2017, s. 19).

Taulukko 6. Esimerkin lähtötietoja

Merkintä	Selite	Lähtötieto
L_k	Jänneväli	6 m
H_k	Korkeus	6 m
q_z	Ulkoinen kuorma	80 kN/m
E	Kimmokerroin	210 GPa
ν	Teräksen Poissonin luku	0,3
A_{pl}	Poikkileikkauksen ala	98,8 cm ²
I_y	Jäyhyysmomentti	33740 cm ⁴
k_{min}	Jousivakion alaraja	10 MN/m
k_{moodi}	Jousivakion moodi	40 MN/m
k_{max}	Jousivakion yläaraja	50 MN/m

6.2 Numeerinen ratkaisu

Epävarmuuden hallinnan prosessi alkaa sillä, että epävarmuutta sisältävät lähtötiedot muotoillaan satunnaismuuttujiksi. Tässä esimerkissä satunnaismuuttujia on kaksi, mutta niille määritellään yhtäläiset otokset. Kutsutaan yksittäisen satunnaismuuttujan, eli tässä tapauksessa jousivakion, otosta yksittäiseksi otokseksi. Otosavaruus muodostetaan yhdistämällä yksittäiset otokset. Tässä esimerkissä yksittäinen otos muodostetaan valitsemalla joukko alkioita *kolmiojakaumalta*. Jakauma, jolta alkioita valitaan riippuu lähtötietojen muotoilusta eli kolmiojakauman sijaan se voisi olla esimerkiksi tasajakauma tai log-normaalijakauma. Kolmiojakauma on sovelluksen kannalta hyödyllinen, sillä sille annetaan rajojen lisäksi moodi, eli jakauman huipun sijainti vaihteluvälillä. Kolmiojakauman kolme parametria ovat taulukossa 6. Otos muodostetaan seuraavaksi kuvatun prosessin kautta:

1. Muodostetaan lista todennäköisyyksiä

$$\bar{u} = \left[\frac{1}{2n} \quad \frac{3}{2n} \quad \frac{5}{2n} \quad \dots \quad \frac{19}{2n} \right]$$

missä

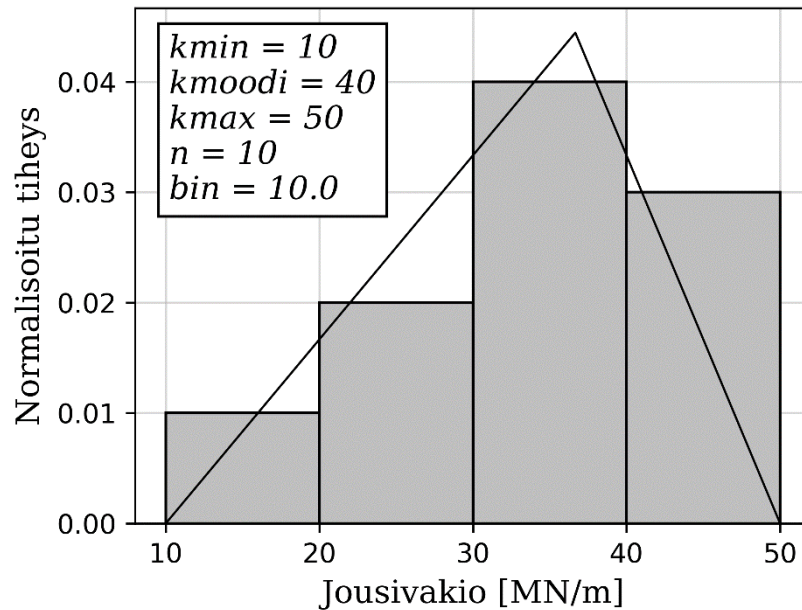
n yksittäisen otoksen koko

Tässä tapauksessa $n = 10$, joten lista sisältää 10 alkia.

2. Yhdistetään todennäköisyydet jousivakion arvoihin kolmiojakaumalla

$$\bar{k} = [17 \ 23 \ 27 \ 30 \ 33 \ 35 \ 37 \ 40 \ 42 \ 45] \text{ MN/m}$$

Tämä tapahtuu luvussa 4.4 kuvatulla menettelyllä käyttäen kertymäfunktion käänteisfunktia. Havaitaan kolmiojakauman painottavan arvoja vaihteluvälin loppupäähän, sillä lähtötietona asetetaan jakauman moodi puolivälin jäykemmälle puolelle. Visuaalisessa muodossa otos esitetään histogrammina (Kuva 21).

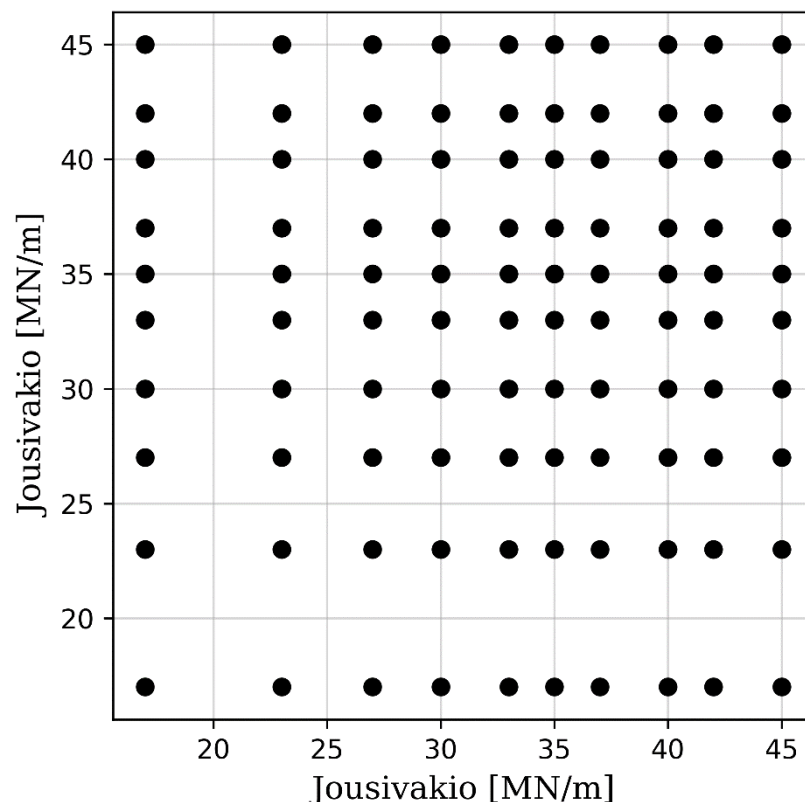


Kuva 21. Kolmiojakaumalla muodostetun otoksen histogrammi ja kolmiojakauman muotoimen sovitekäyrä

3. Yhdistetään jousivakioiden arvot systemaattisesti otosavaruudeksi, jonka rivien lukumäärä on täten n^2

$$\bar{\bar{k}} = \begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 17 & 23 \\ 17 & 27 \\ \vdots & \vdots \\ 45 & 42 \\ 45 & 45 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

Otosavaruuden systemaattinen kokoaminen ei sisällä satunnaisuutta kuten aikaisemmin esitellyssä LHC-menetelmässä. Visuaalisessa muodossa otosavaruus voidaan esittää hajontakaaviona (Kuva 22). Kuten hajontakaaviosta näkee, niin jokainen ensimmäisen jousen arvo pariutuu kaikkien toisen jousivakion alkioiden kanssa.



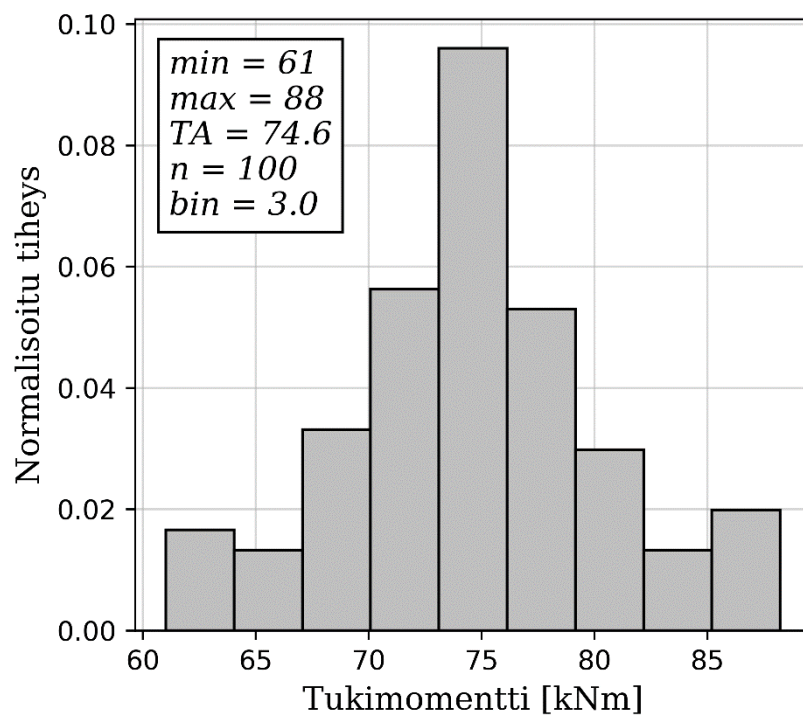
Kuva 22. Otosavaruuden hajontakaavio

4. Lasketaan rakennemalli FEM-ohjelmalla

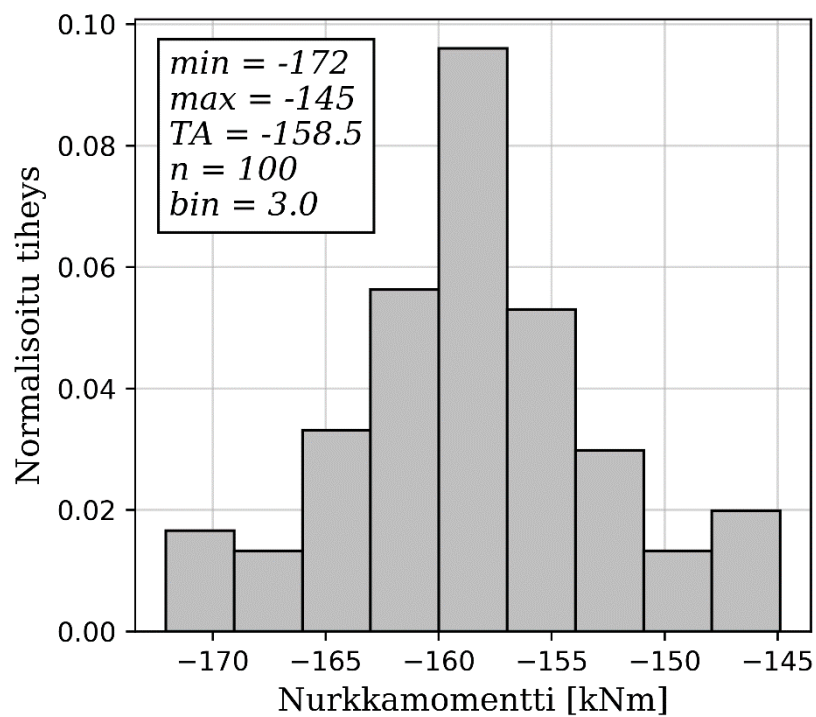
Lähtötietoja ei tarvitse muuttaa käsin 100 kertaa, vaan FEM-ohjelmaa ohjataan VBA-kielellä laskemaan kaikki määrätyt kombinaatiot. Otos muodostetaan Python-kielellä ja tallennetaan tekstitiedostoksi, jonka VBA lukee ja ohjaa FEM-ohjelmalle. Tässä muutetaan siis pistemäisen tuen jousivakiota, mutta algoritmilla voidaan muuttaa mitä tahansa lähtötietoa ja käsitellä kaikkia samoja tuloksia kuin normaalisti FEM-ohjelmaa käytettäessä. Tässä työssä käytetään *Dlubal RFEM5* -nimistä FEM-ohjelmaa. Ohjelmaa ohjaava VBA-algoritmi esitetään liitteestä 1, jonka kautta voi tutustua koodin toimintaan ja hyödyntää sitä muissa sovelluksissa. RFEM5-ohjelman ohjaamiseen ei ole olemassa yksityiskohtaista ohjeistusta, mutta algoritmin toimintaa on mahdollista seurata, jos ymmärtää olio-ohjelmoinnin perusperiaatteita.

5. Käsitellään tulokset

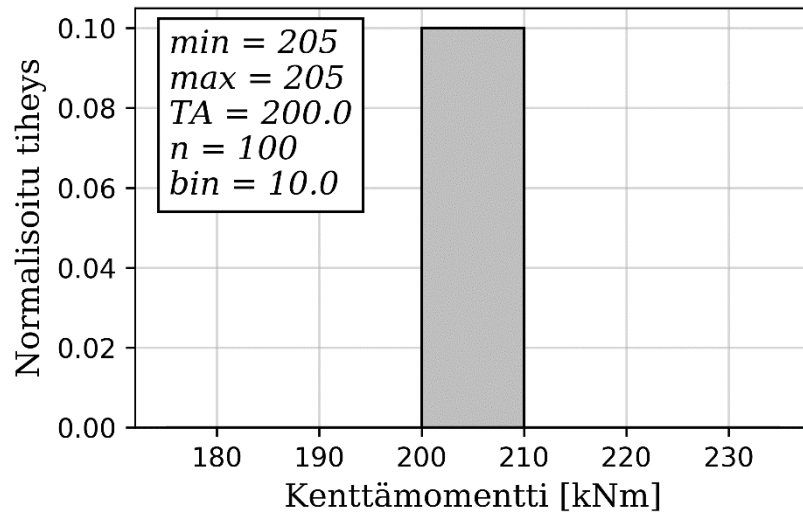
Tässä esimerkissä tarkastellaan taivutusmomenttia kolmessa kohtaa kehärakennetta. Epävarmuuden välittymistä ja sisäisten voimasuureiden herkkyyttä jousien epävarmuudelle havainnollistetaan histogrammeilla (Kuva 23, Kuva 24 ja Kuva 25). Ku-
vissa esitetään tulosten pienin, todennäköisin (*TA*) ja suurin arvo sekä luokkaväli (*bin*) ja otoskoko (*n*). Todennäköisin arvo on histogrammin korkeimman pylvään keskikohdan sijainti vaaka-akselilla.



Kuva 23. Tukimomentin histogrammi ja muut tulokset



Kuva 24. Nurkkamomentin histogrammi ja muut tulokset



Kuva 25. Kenttämomentin histogrammi ja muut tulokset

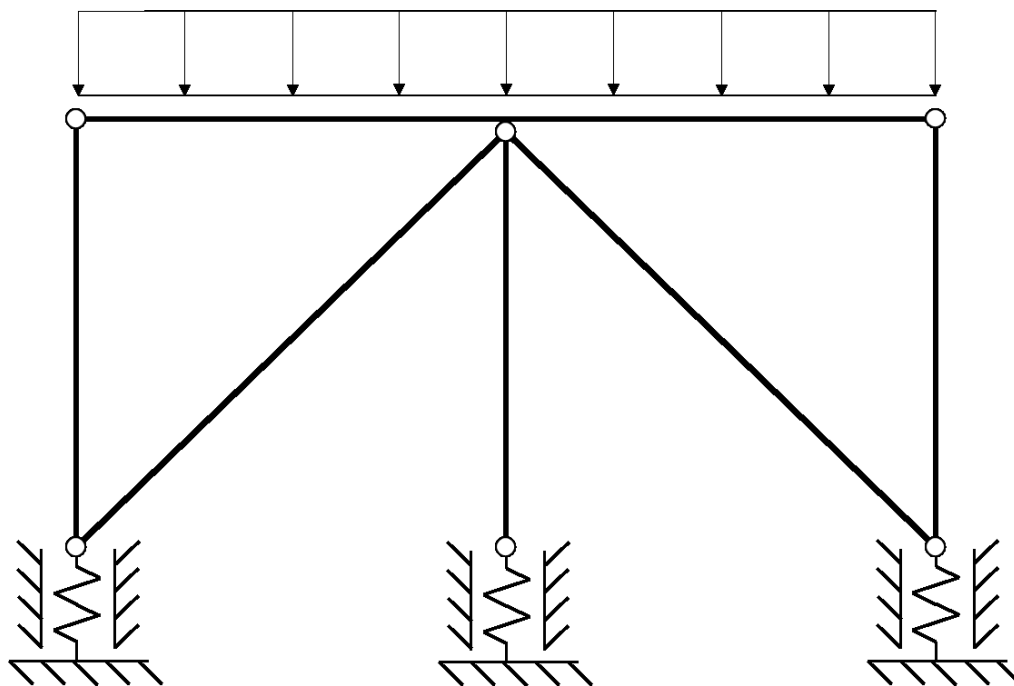
Esimerkin kehärakenteen tuki- ja nurkkamomentti ovat jossain määrin herkkiä jousivakion epävarmuudelle toisin kuin kenttämomentti, jolle ei välity epävarmuutta. Kahdessa ensimmäisessä histogrammissa havaitaan voimakkaat piikit ääripäissä, mutta näiden ja huipun välissä on tyhjää. Tämä johtuu systemaattisesta otosavaruudesta ja suhteellisen pienestä otoskoosta ($n = 100$).

6.3 Kaksiaukkoinen tasokehä ja ratkaisumallin haasteet

Seuraavalla esimerkillä havainnollistetaan edellä esitetyn menetelmän haasteellisuutta laskentojen lukumäärän suhteen. Lisäksi havainnollistetaan, miten rakennemallin muuttaminen vaikuttaa epävarmuuden välittymiseen.

6.3.1 Lähtötiedot

Lähtötiedot ovat muuten samat kuin edellisessä esimerkissä, mutta kehän rakennemalli ei ole enää kehäjäykisteinen vaan vinosauvoilla stabiloitu (Kuva 26).



Kuva 26. Rakennemalli ja kuorma

6.3.2 Numeerinen ratkaisu

Yksittäisillä jousilla on edelleen samat lähtötiedot, eli 10 alkiota määritetyltä kolmiojakau-
malta. Edellisessä kahden tuen esimerkissä jousivakioiden yhdistelmiä muodostui 100, kun
taas tässä kombinaatioita on 1000. Muodostettaessa otosavaruus systemaattisesti yhdistäen
kaikki mahdolliset jousivakioiden kombinaatiot, tulee otosmatriisin rivien lukumääräksi:

$$m = n^s \quad (6.1)$$

missä

m otosmatriisin rivien lukumäärä

n jousivakion otoskoko

s pistemäisten tukien lukumäärä

Jousivakioiden kombinaatiot sisältävän otosmatriisin koko on kolmen tuen tapauksessa 1000
riviä ja 3 saraketta.

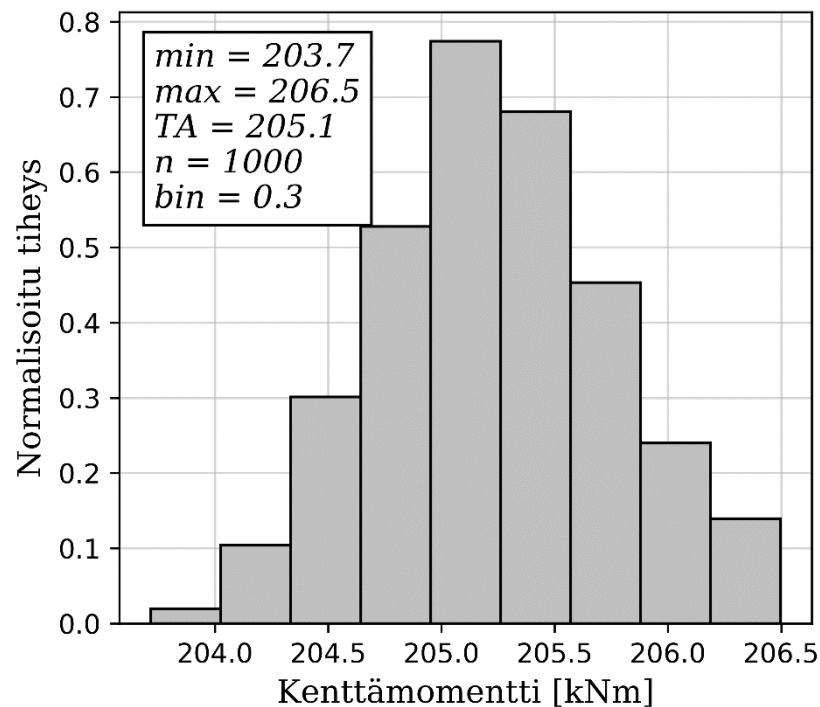
$$\bar{\bar{k}} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 23 \\ 17 & 17 & 27 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 45 & 45 & 42 \\ 45 & 45 & 45 \end{bmatrix} MN/m$$

Suuresta otoskoosta aiheutuen laskenta-aika kasvaa melko pitkäksi ollen tässä esimerkissä
24 minuuttia, mikä johtuu FEM-ohjelman käytöstä. Algoritmilla ei voi erikseen määrittää

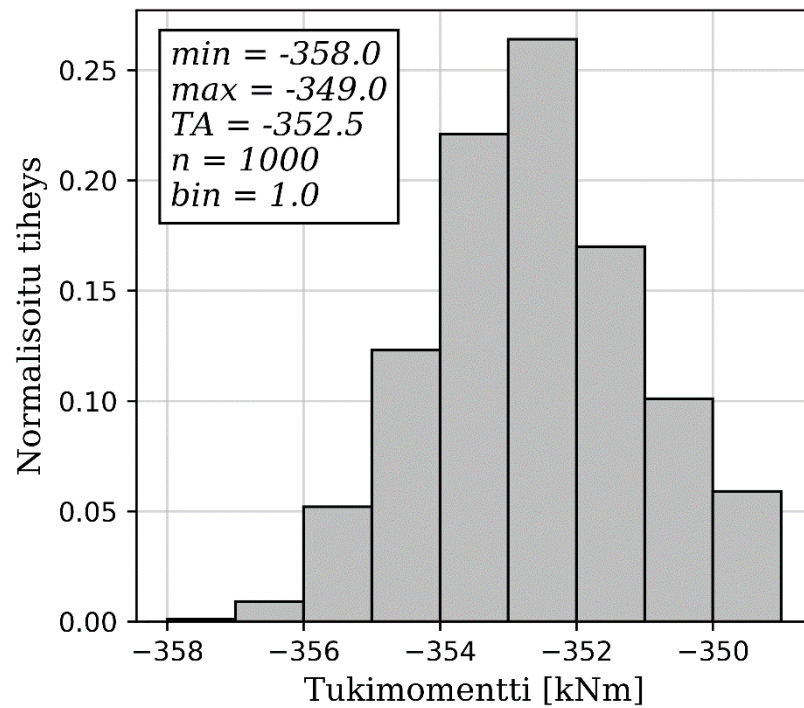
mitkä elementtimenetelmän yhtälöt FEM-ohjelma laskee, vaan kaikki tulokset tuotetaan jokaisella kierroksella muutettaessa tukien jäykkyyksiä.

6.3.3 Tulokset

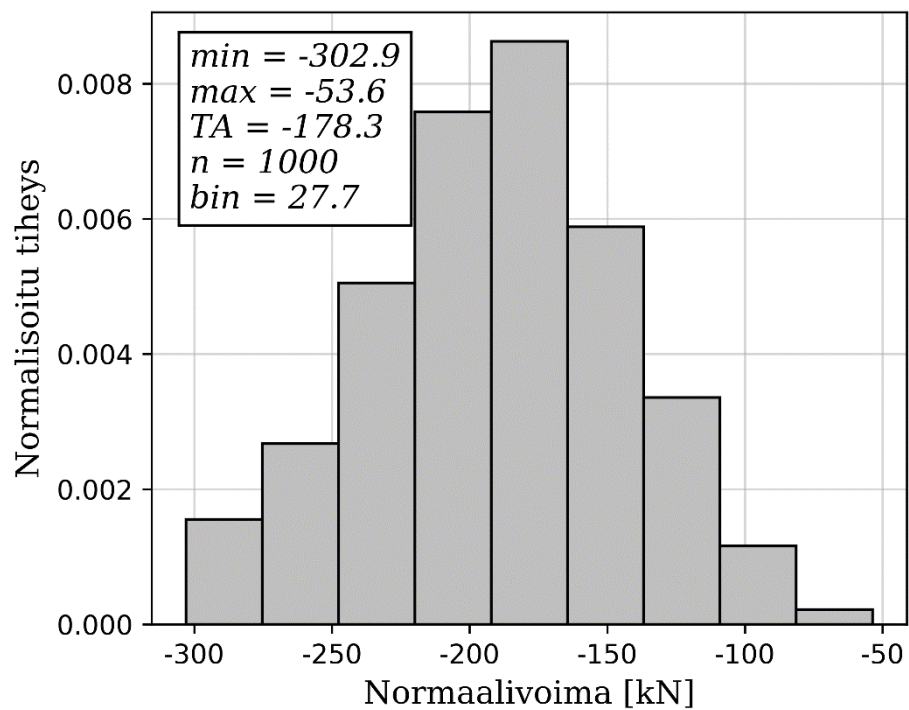
Vaakapalkin suurin kenttämomentti osoittautuu tälläkin rakennemallilla esimerkiksi sisäisestä voimasta, jolle ei johdu merkittävää epävarmuutta (Kuva 27). Edellisessä esimerkissä kehän jäykät nurkat osoittautuivat epävarmuudelle herkiksi, mutta tässä palkin jatkuvan tuen taivutusmomentti ei reagoi epävarmuuteen merkittävästi. Suurin vaihteluväli on vain 9 kNm (Kuva 28). Tuloksia tarkasteltaessa päästään nivelellisen vinojäykisteen normaalivoima osoittautui reagoivan merkittävimmin epävarmuuteen. Histogrammista epävarmuus havaitaan laakeana muotona sekä vaihteluvälistä, joka on jopa 249 kN (Kuva 29). Histogrammien data on normalisoitu eli pylväiden alojen summa on yksi. Esimerkiksi alla olevassa histogrammissa korkeimman pylvään korkeus on lähes 0,8, mikä kertoo datan keskittyneen pienelle vaihteluvälille.



Kuva 27. Epävarmuusanalyysin tulos kenttämomentille



Kuva 28. Epävarmuusanalyysin tulos tukimomentille



Kuva 29. Epävarmuusanalyysin tulos normaalivoimalle

6.4 Metodiikan pelkistäminen ääriarvoanalyysiksi

Edellisellä metodiikalla tuotettiin tuloksia diskreetteinä satunnaismuuttujina. Tuloksista voitiin ääriarvojen lisäksi erottaa todennäköisin arvo, koska lähtötiedot muotoiltiin satunnaismuuttujiksi. Jos tulosten ääriarvot ovat riittävä informaatio, niin epävarmuusanalyysiä voidaan yksinkertaistaa. Laskentojen lukumäärä ja tulosten käsittely yksinkertaistuvat muotoiltaessa lähtötiedot pelkiksi ääriarvoiksi, jolloin myös tulokset sisältävät pelkästään suurimman ja pienimmän arvon. Edellisen kaksiaukkoisen kehän tapauksessa 1000 laskentakertaa putoaa kahdeksaan.

Edellä esitetty kaava (6.1) määrittää ääriarvoanalyysin otosmatriisin dimensiot. Yksittäisellä jousella on kaksi mahdollista arvoa ($n = 2$) ja pistemäisiä tukia on kolme ($s = 3$), jolloin rivien lukumäärä on kahdeksan ($m = n^m = 8$). Osoismatriisi esitetään tässä kokonaisuudessaan:

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 45 \\ 17 & 45 & 17 \\ 17 & 45 & 45 \\ 45 & 17 & 17 \\ 45 & 17 & 45 \\ 45 & 45 & 17 \\ 45 & 45 & 45 \end{bmatrix} MN/m$$

Jokaiselle tulokselle on kaksi mahdollista arvoa, joten mitoituksen perusteeksi yksinkertaisesti etsitään näistä kriittisempi. Tietyissä tapauksissa kumpikin tulos esitetään, sillä sekä negatiivinen että positiivinen arvo voivat olla merkityksellisiä poikkileikkauksen mitoitukselle. Esimerkiksi pilarin tapauksessa taivutusmomentin etumerkin vaihtumisella ei ole tavallisesti merkitystä, kun taas palkilla rauditus on tyypillisesti epäsymmetrinen. Tällöin taivutusmomentin kumpikin arvo vaaditaan poikkileikkausta mitoittaessa. Taulukko 7 sisältää ääriarvoanalyysin tulokset edellistä esimerkkiä vastaavissa poikkileikkauksissa.

Taulukko 7. Yksinkertaistetut tulokset kuvan 26 kehälle

Kenttämomentti		Tukimomentti		Normaalivoima	
[kNm]		[kNm]		[kN]	
min	max	min	max	min	max
203,7	206,5	-358	-350	-303	-53,6

Ääriarvoanalyysillä on sama ongelma kuin edellä esitetyllä systemaattisella otannalla, eli laskettavien kombinaatioiden määrä kasvaa eksponentiaalisesti satunnaismuuttujien lukumäärän mukana. Esimerkiksi rakennemalli jossa on 7 jouta täytyy ääriarvoanalyysilläkin

laskea 128 kertaa, jotta kaikki mahdolliset yhdistelmät käydään läpi. Myöhemmissä esimerkeissä testataan LHC-menetelmää, koska siinä laskentojen lukumäärä ei ole riippuvainen tukipisteiden määrästä.

6.5 *Fraktiiliin perustuva mitoitus*

Mikäli mitoituksessa hyväksytään pieni luotettavuuden menetys, voidaan epävarmuusanalyysin tuloksista arvioida häntien todennäköisyyksiä vastaavia arvoja. Pienenkin luotettavuuden menetyksen hyväksyminen voi johtaa merkittävään huojennukseen mitoitusarvossa suhteessa ääriarvoon.

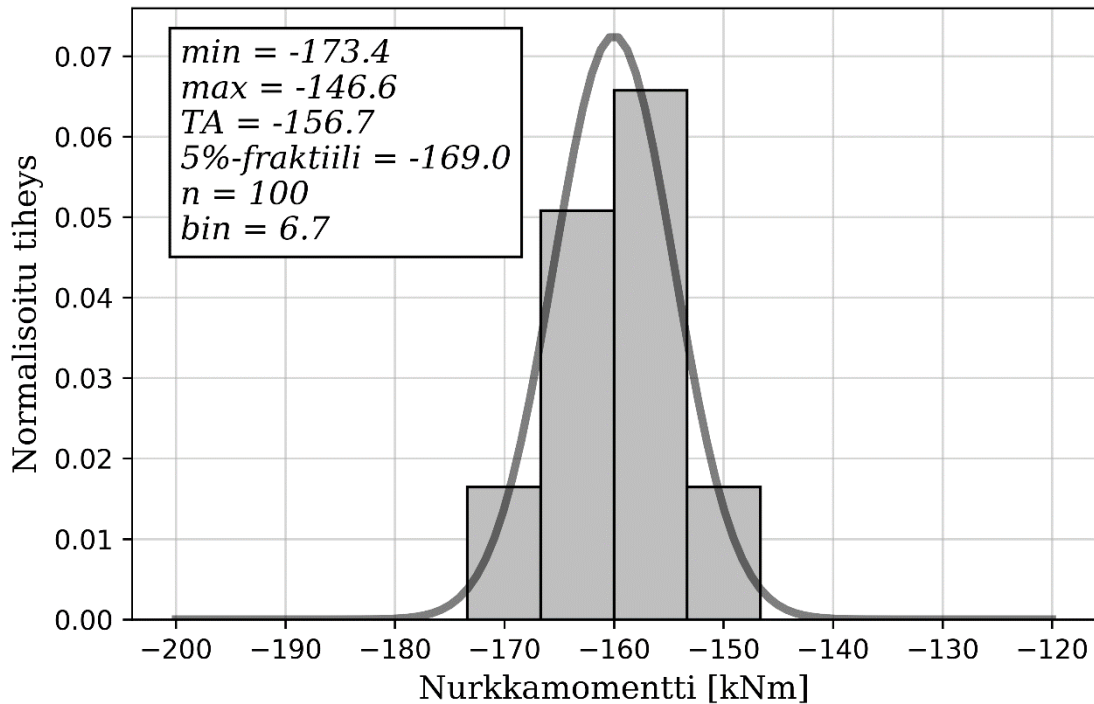
6.5.1 Analyytinen ratkaisu tutkimuksen apuna

Tutkitaan mahdollisuutta hyödyntää häntien todennäköisyyksiä vastaavia arvoja eli fraktiileja käyttäen hyödyksi analyttistä yhteyttä edellä esitetyn yksiaukkoisen kehärakenteen nurkkamomentin ja jousivakioiden välillä. Seuraavaksi esitettävä kaava on ratkaistu liitteessä 2 sauvarakenteiden yksinkertaistetulla siirtymämenetelmällä.

$$M = - \frac{L^2 q (k_1 k_2 L^4 + 18 H k_1 EI - 18 H k_2 EI + 48 L k_1 EI - 24 L k_2 EI + 6 H L^3 k_1 k_2)}{6 (H + 2L) (k_1 k_2 L^3 + 6 H L^2 k_1 k_2 + 12 k_1 EI + 12 k_2 EI)} \quad (6.2)$$

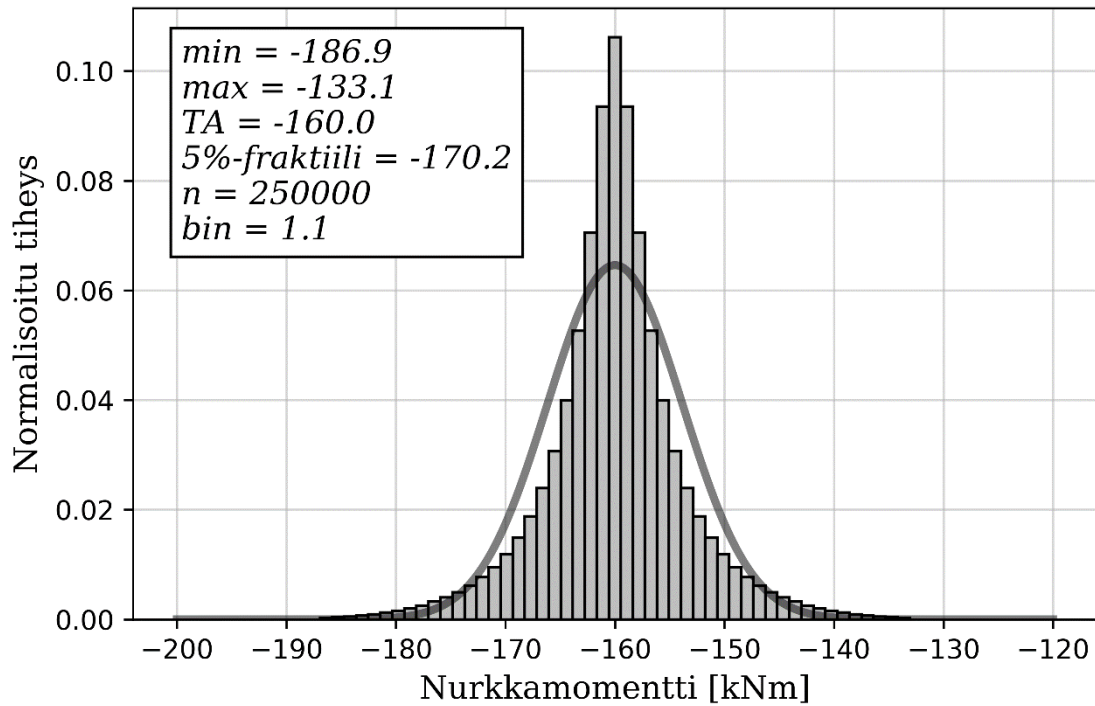
Analyttisen kaavan käyttö on tutkimusmielessä hyödyllistä verrattuna FEM-ohjelmalla laskentaan. Kuten sanottua FEM-ohjelma laskee kaikki rakennemallin tasapainoyhtälöt, mutta nyt laskenta voidaan kohdistaa yhteen tutkittavaan tulokseen, mikä mahdollistaa suurten otosten testaamisen huomattavasti lyhyemmässä ajassa. Esimerkiksi edellä laskettiin 1000 kierrosta FEM-ohjelmalla ja aikaa kului noin 24 minuuttia. Analyttisellä yhtälöllä ja Python-algoritmeilla tämä kestää vain muutaman sekunnin.

Sijoitetaan edellisen esimerkin lähtötiedot ja simuloidaan kaavaa (6.2) yksinkertaisella algoritmilla, jolloin tuotetaan sama histogrammiesitys kuin kuvassa 24. Alafraktiilin, esimerkiksi 5 % fraktiilin, arvioimiseksi sovitetaan simuloidulle datalle todennäköisyysjakauma. Tässä sovitteena käytetään *gammajakaumaa* (Kuva 30). 5 % fraktiili on esimerkki eikä yleinen taso, jota epävarmuuden hallinnassa tulee käyttää. Gammajakauma puolestaan on vain yksi mahdollinen funktio sovitteeksi. Myöhemmin sovitteena käytetään *log-normaalijakaumaa*, mutta tässä tapauksessa otos osoittautui liian pieneksi, jotta log-normaalinen sovite tuottaisi edes suurin piirtein oikean muotoisen käyrän. Tärkeintä on muodostaa tulosdataa mahdollisimman tarkasti mukaileva käyrä, jolla voidaan laskea fraktiilitodennäköisyyttä vastaava tulos.



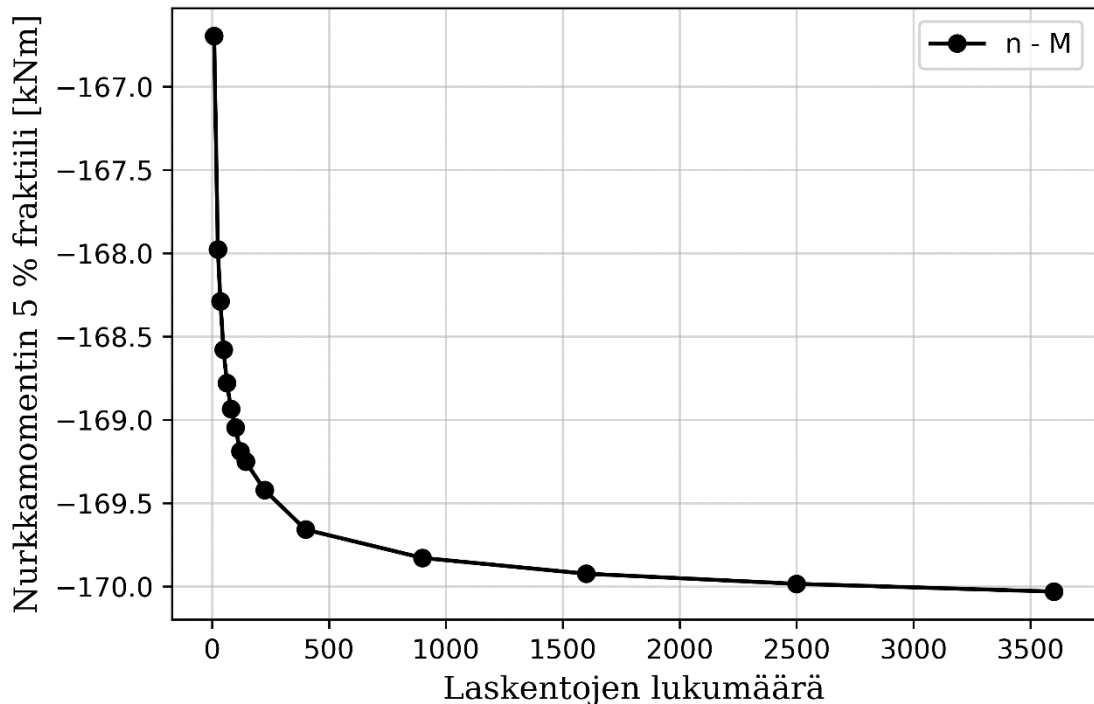
Kuva 30. Kehän (Kuva 20) nurkkamomentin histogrammi, gamma-sovite ja muut tulokset

Tässä tapauksessa fraktiili on vain 4,4 *kNm* epäkonservatiivisempi kuin tuloksen ääriarvo. Analyyttistä yhtälöä simuloitaessa voidaan laskennallisesti nopeasti tarkistaa jakauman muoto ja arvo, jota kohti fraktiili konvergoi kasvatettaessa otoskokoa. Kuvasta 31 havaitaan fraktiilin arvon kasvavan 1,2 *kNm* kasvatettaessa otoskokoa 100 → 250000, joten pienikin otos antaa tässä tapauksessa hyvän arvion fraktiilin suuruudesta. Tuloksesta havaitaan myös, ettei histogrammin datalle tehty käyräsovite ole optimaalinen.



Kuva 31. Yksiaukkoisen kehän nurkkamomentin tulokset suuremmalla otoskoolla

Tässä tapauksessa fraktiilin arvo konvergoi hyvin nopeasti otoskokoa kasvattamalla (Kuva 32). Pienen otoksen aiheuttama virhe suhteessa suureen on suuruusluokkaa 1 kNm , mikä ei rakennusten suunnittelussa ole ongelmallinen. Kuva 32 on tuotettu toistamalla epävarmuus-analyysiä 15-kertaa kasvattamalla otosta jokaisen laskentakerran jälkeen.



Kuva 32. Otoksoon kasvattamisen vaikutus nurkkamomentin 5 % fraktiiliin

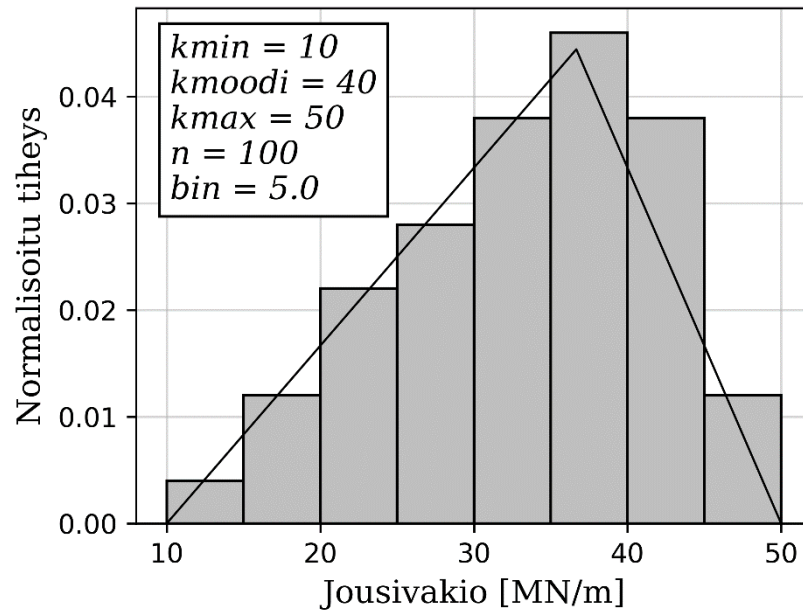
6.6 Osittain satunnaisen otanta

Vaihtoehtoinen tapa systemaattiselle otannalle on osittain satunnainen otanta, jota selitettiin luvussa 4.4. Tällä menetelmällä jousivakioiden kombinaatiot muodostetaan satunnaisesti eli lähes jokaisen analyysin tulos on uniikki. Menetelmän etu on, ettei laskentojen lukumäärä kasva eksponentiaalisesti laskentamallin lähtötietomuuttujien mukana.

Osittain satunnainen otanta poikkeaa edellä esitetystä menetelmästä otosavaruuden muodostamisen osalta. Yksittäiset jousivakioiden otokset valitaan systemaattisesti kuten edellä, mutta kaksi saraketta sisältävä otosmatriisi muodostetaan järjestämällä toinen sarakkeista satunnaiseen järjestykseen. Jos lähtötietomuuttujia on useampia, niin kaikki paitsi yksi otosmatriisin sarakkeista tulee sekoittaa satunnaiseen järjestykseen.

6.7 Vertailu systemaattiseen otantaan

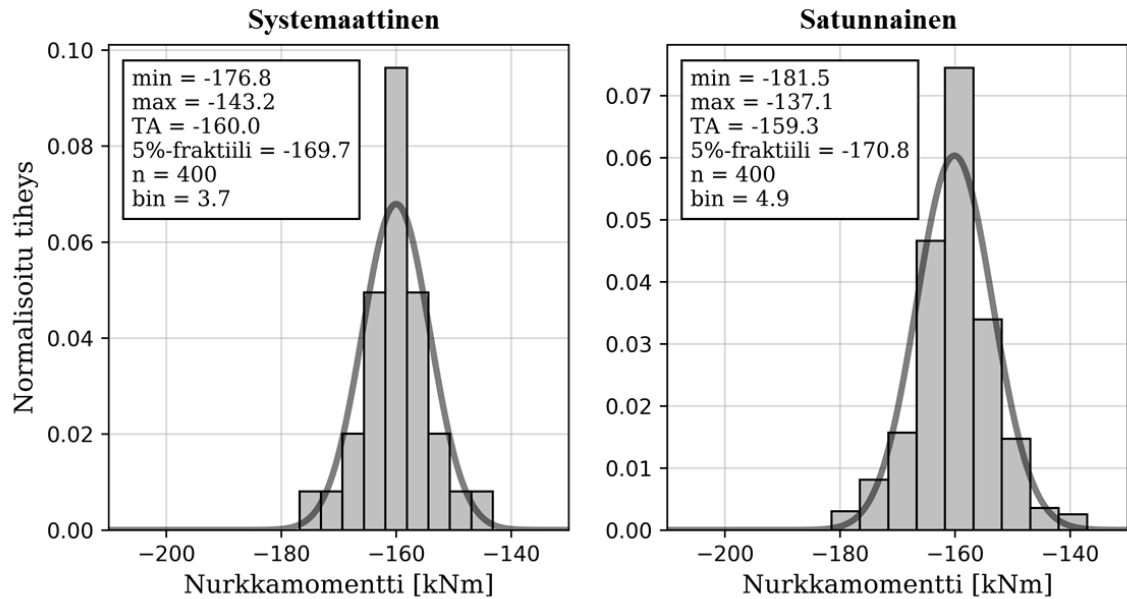
Osittain satunnaisella otannalla yksittäisen otoksen koko määrää otosavaruuden rivien lukumäärän. Systemaattisen otannan esimerkklaskelma (Kuva 21) sisälsi 10 alkioita, joista kombinoitiin 100 alkion otosavaruus. Satunnaisuutta hyödynnettäessä vastaavan kokoisessa laskelmassa yksittäinen otos sisältää 100 alkioita kuten myös otosavaruus. Yksittäinen otos mukaillee kolmiojakaumaa tarkemmin verrattuna kuvaan 21, koska alkioita valitaan kertymäfunktion käänteisfunktiolla 10-kertaa tiheämmin (Kuva 33).



Kuva 33. Kolmiojakaumalla muodostetun otoksen histogrammi ja sovitekäyrä

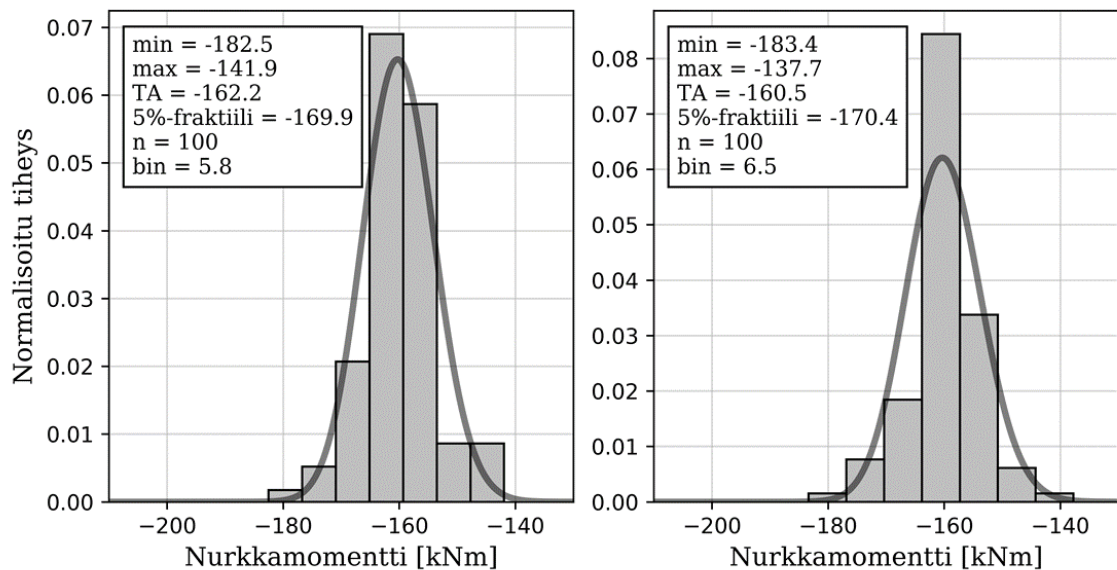
Nurkkamomentin analyttisen kaavan simuloiminen eri otantamenetelmillä paljastaa muutamia eroavaisuuksia tuloksien välillä. Kuva 34 sisältää tulosten vertailun otantaa lukuun ottamatta identtisille laskelmille. Laskelmassa simuloitulle tulosdatalle on sovitettu gamma-jakauma fraktiilin arvon laskemiseksi. Sovite ei ole optimaalisin tämän muotoiselle histogrammille, mutta ongelma on toissijainen menetelmää havainnollistettaessa.

Systemaattinen otanta tuottaa symmetrisen tuloksen lyhyemmällä vaihteluvälillä verrattuna osittain satunnaiseen otantaan. Molemmilla histogrammeilla on 9 pylvästä, mutta luokkaväli (*bin*) poikkeaa hieman, koska satunnaisella tuloksella on pidempi vaihteluväli. Satunnaisotannalla tuotetaan pidempi vaihteluväli, koska lähtötietomuuttujan jakauma jaetaan siinä useampaan osaan. Jaettaessa lähtötietomuuttujan jakauma pienempiin osiin, tulee häntäpäästä valituksi arvoja lähempää jakauman ääriarvoa, mikä mahdollistaa suuremman jäykkyyseron rakennemallin jousien välillä ja edelleen suuremman kehän nurkkamomentin. Systemaattinen otanta siis diskretoi määrätyn lähtötietojakauman epätarkemmin verrattuna satunnaisotantaan samalla otoskoolla. Tämä näkyy myös fraktiilissa, jota systemaattinen analyysi aliarvioi.



Kuva 34. Systemaattisen ja satunnaisten otannan vertailu

Kuva 35 sisältää kaksi tulosta, jotka on tuotettu samoilla lähtötiedoilla ja algoritmeilla. Eniten poikkeavuutta on moodin sijainnissa ja ääriarvoissa, mutta fraktiili ei juurikaan muutu.

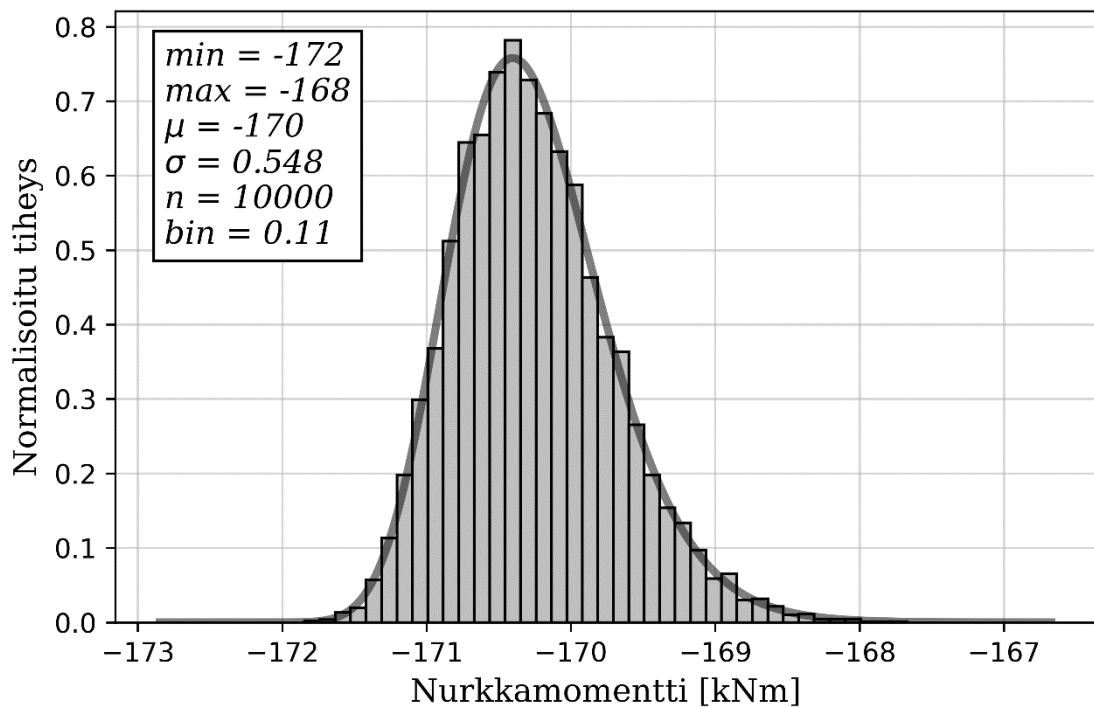


Kuva 35. Satunnaisten epävarmuusanalyysin tulosten vertailu

6.8 Laskennallisen satunnaisuuden aiheuttama tilastollinen vaihtelu

Satunnainen otanta tuottaa lähes poikkeuksetta uniikin tuloksen. Tuloksella on tietynasteinen vaihteluväli riippuen ratkaistavasta yhtälöstä, otoskoosta ja erityisesti kombinoitavien

lähtötietojen lukumäärästä. Toistamalla edellistä epävarmuusanalyysiä demonstroidaan tätä ilmiötä. Kuva 36 sisältää histogrammin 5 % fraktiilin arvolle, kun 100 laskennan epävarmuusanalyysiä toistetaan 10000-kertaa. Havaitaan tuloksen olevan todennäköisyysjakautunut, mutta vaihteluväli on suhteellisen pieni verrattuna muihin virhelähteisiin. Tämän perusteella otoskoko 100 on riittävä kahden jousituen mallille tarkasteltaessa fraktiilia. Tukien lukumäärän kasvaessa hypoteesi on, että otoskoko tulisi kasvattaa tai satunnaisuudesta aiheutuva tilastollinen vaihtelu kasvaa. Tässä tapauksessa vaihtelu mukailee log-normaalista sovitteikäyrää.



Kuva 36. Nurkkamomentin 5 % fraktiilin histogrammi ja log-normaalinen sovite

6.9 Epävarmuusanalyysin haasteet kokonaisten rakennusten mittakaavassa

Esimerkkilaskelmien perusteella epävarmuusanalyysi, jossa hyödynnetään osittain satunnaista otantaa soveltuu paremmin käytäntöön, sillä laskentojen lukumäärä ei ole riippuvainen rakennemallin tukien lukumäärästä. Haasteita ovat menetelmällä laskettujen tulosten tilastollinen vaihtelu ja kombinaatioiden satunnaisuus mikä tarkoittaa, etteivät tulosten ääriarvot välttämättä ilmene. Jatkotutkimuksessa tulisi monitoroida tilastollista vaihtelua suuremmalla rakennemalleilla, koska tässä osittain satunnaista otantaa testattiin vain kahden jousituen mallilla. Kokonaisten rakennusten mittakaavassa pistemäisiä tukia on tavallisesti kymmeniä, jolloin osittain satunnaisten otosten tulokset voivat itsessään sisältää huomattavaa epävarmuutta.

Tämän työn puitteissa ohjelmoitiin algoritmi ohjaamaan FEM-ohjelmaa, mikä on edellytys sovellettaessa metodiikkaa monimutkaisille rakennemalleille. Algoritmi on täysin mallispesifi, joten uusi rakennemalli vaatii aina algoritmin muokkaamisen. Myös tulosten käsittely on manuaalista ja melko työlästä. Käytännöllisintä on integroida metodiikka FEM-ohjelmaan tai kehittää erillinen ohjelma lähtötietojen asettamiseen ja tulosten käsittelyyn. Taval- lisesti rakennesuunnittelijoilla ei ole ohjelmoinnin eikä tilastotieteen riittävää osaamista tä- mänkaltaisten sovellusten kehittämiseen, joten on tärkeää luoda yleinen helposti käytettävä ohjelmisto tukien joustavuuden epävarmuuden hallintaan.

Epävarmuusanalyysin käytettävyyttä arvioitaessa täytyy muistaa, että rakenteet mitoitetaan useille kuormitusyhdistelmille. Ensinnäkin menetelmän käytettävyys heikkenee entisestään, sillä laskenta-aika kertaantuu. Lisäksi eri kuormitusyhdistelmillä epävarmuuden välittyminen voi muuttua merkittävästi samalla rakennemallilla. Esimerkiksi vaakakuormaa sisältävä kuormitusyhdistelmä voi aiheuttaa epävarmuuden kasvun täysin eri kohdissa rakennetta suhteessa näiden esimerkkien pystykuormitettuun rakenteeseen. Kuten edellä todettiin, tavallisesti riittää huomioida käyttörajatilan kuormitusyhdistelmät, vaikkakin erikoistapauksissa täytyy laskea myös murtorajatilan yhdistelmät (SFS-EN 1992-1-1+A1+AC 2015, s. 23).

Koska maaperän epätasaiset painumat ovat kriittisiä rakenteelle, niin on selvää, että hyötykuorman sijainti ja suuruus vaikuttavat tulokseen. Kriittisin tilanne ei välttämättä löydy asettamalla suurin mahdollinen hyötykuorma kaikkiin mahdollisiin sijainteihin. Jotta painumajärjestelmien kannalta kriittisin tulos löydetään, tulee muodostaa useita kuormitusyhdistelmiä, joilla hyötykuorman sisältämä epävarmuus huomioidaan. Jos kriittisintä kuormituskaaviota ei voi ennustaa, niin käytännöllisintä olisi automatisoida laskenta käymään läpi eri tapaukset samalla epävarmuuden hallinnan periaatteella kuin tässä työssä käytettiin maajousien lähtötietojen epävarmuuden hallintaan.

7 Yhteenveto

Maaperän jäykkyyssparametrien epävarmuutta voidaan hallita epävarmuusanalyysillä. Menetelmän merkittävä etu on mahdollisuus käyttää lähtötietojen vaihteluväliä ja siirtää epävarmuus tuloksiin. Perinteinen tapa on käsitellä lähtötiedot varmuuskertoimilla ja yhdistellä näitä tavalla, jolla kriittiset yhdistelmät tulevat lasketuksi. Epävarmuusanalyysissä laskenta automatisoidaan käymään kaikki tapaukset läpi eli ongelma ratkaistaan algoritmilla ja suurella laskentakapasiteetilla. Satunnaismuuttujina esitettävistä tuloksista saa selkeän käsityksen epävarmuuden välittymisestä.

Laskentamallin jousitukien epävarmuuden havaittiin johtuvan maaparametrien epävarmuuden lisäksi myös rakennusprojektin eri osapuolten välisestä rajapinnasta, jossa lähtötietojen epävarmuus vaikuttaa osapuolten suunnittelutyöhön. Lisäksi varsinainen suunnittelu on jakautunut kuten myös normit. Normien osalta johtopäätös on, että rakenteelle sallittavia muodonmuutoksia arvioitaessa tulisi seurata rungon materiaalia koskevaa normia, eikä esimerkiksi geoteknisiä normeja, joiden raja-arvot voivat olla huomattavasti suuripirteisempiä ja huomattavasti konservatiivisempia.

Suunnittelutyökaluna luotettavuusanalyysi toimii parhaiten, kun se yhdistetään totuttuun FEM-ohjelman käyttöliittymään. Tämän työn puitteissa kehitetyillä työkaluilla laskentaa tehdään rinnakkain taulukko-ohjelman kanssa. Käyttöliittymän selkeyttämisen ja laskentatehon lisäämisen jälkeen epävarmuusanalyysijä voitaisiin luultavasti suorittaa tavallisillekin suunnittelutehtäville. Luultavimmin maaperän jäykkyyden epävarmuuden hallinta tulee kuitenkin tarpeeseen vain vaativissa kohteissa vaadittaessa numeerista perustelua lähtötietojen epävarmuuden vaikutuksille.

Tässä työssä tutkittiin maaperän jäykkyyssparametrien epävarmuuden hallintaa ja kehitettiin metodiikkaa epävarmuuden hallintaan. Tutkimuksessa testattiin hieman toisistaan poikkeavia otanta-algoritmeja osana ratkaisumallia. Käytännön sovelluksia ajatellen osittain satunnainen otanta osoittautui kahdesta tutkitusta menetelmästä kehityskelpoisemmaksi. Epävarmuuden hallinnan metodiikan jatkotutkimuksessa tai suunnittelutyökalun jatkokehityksessä suositellaan käytettäväksi satunnaisotantaa, mutta tarkkailemaan sen sisältämän laskennallisen epävarmuuden suuruutta tuloksissa. Tämän työn tulosten perusteella hypoteesi on, että mallin sisältäessä enemmän kuin kaksi satunnaismuuttujaa, epävarmuusanalyysin tulosten laskennallinen epävarmuus kasvaa. Otoksoon kasvattamisen oletetaan pienentävän tilastollista vaihtelua useita jousitukia sisältävän rakennemallin tapauksessa.

Lähdeluettelo

- Asp, O. (2014). *Luotettavuusanalyysin perusteita siltojen kantavuuden arvioinnissa*. Liikennevirasto, infra- ja ympäristöosasto. Helsinki. Liikenneviraston tutkimuksia ja selvityksiä 20/2014. 114 s. ISSN-L 1798-6656, ISSN 1798-6664, ISBN 978-952-255-448-2. (sähköinen).
- Chrisman L. (2014). *Latin Hypercube vs. Monte Carlo Sampling* [verkkoaineisto]. [viitattu 29.11.2017]. Saatavissa: <http://www.lumina.com/blog/latin-hypercube-vs.-monte-carlo-sampling>.
- Fenton, G.A. & Griffiths, D.V. (2008). *Risk assessment in geotechnical engineering*. New Jersey, USA: Wiley. 461 s. ISBN 978-0-470-17820-1.
- Janbu, N. (1970). *Grunnlag i geoteknikk*. Trondheim. Norja. 426 s.
- Jääskeläinen, R. (2011). *Geotekniikan perusteet*. 4. painos. Amk-kustannus Oy. 387 s. ISBN 978-952-5491-50-0.
- Kiureghian, A.D. & Ditlevsen, O. (2017). *Aleatory or epistemic? Does it matter?*. Special Workshop on Risk Acceptance and Risk Communication. Stanford University. 13 s. [verkkoaineisto]. [viitattu 24.1.2018]. Saatavissa: http://www.ripid.ethz.ch/Paper/Der-Kiureghian_paper.pdf.
- Korhonen, K.H. (1985). *Rakenteiden painuminen*. RIL 157-1 Geomekaniikka I. Helsinki: Suomen rakennusinsinöörien liitto RIL ry. 479 s. ISBN 951-758-086-X.
- Korkiala-Tanttu, L. & Löfman, M. (2016). *Luotettavuuden arviointi ja riskienhallinta geoteknisessä suunnittelussa*. Liikennevirasto, tekniikka ja ympäristö -osasto. Helsinki. Liikenneviraston tutkimuksia ja selvityksiä 44/2016. 101 s. ISSN-L 1798-6656, ISSN 1798-6664, ISBN 978-952-317-318-7. (sähköinen).
- Kucherenko, S. Albrecht, D. Saltelli, A. (2015). *Exploring multi-dimensional spaces: a Comparison of Latin Hypercube and Quasi Monte Carlo Sampling Techniques* [verkkoaineisto]. [viitattu 4.12.2017]. Saatavissa: <https://arxiv.org/abs/1505.02350>.
- Leskelä, M.V. (2005). *Betonirakenteiden suunnittelu ja mitoitus*. by 210. Helsinki: Suomen Betoniyhdistys r.y. 711 s. ISSN 0358-5255. ISBN 952-5075-75-3.
- Liikennevirasto. (2017). *Eurokoodin soveltamisohje*. Geotekninen suunnittelu – NCCI7. Helsinki: Liikenneviraston ohjeita 13/2017. 165 s. ISSN-L 1798-663X, ISSN 1798-6648, ISBN 978-952-317-387-3. [verkkoaineisto]. [viitattu 9.2.2018]. Saatavissa: https://julkaisut.liikennevirasto.fi/pdf8/lo_2017-13_ncci7_web.pdf.
- Mellin, I. (2008). *Todennäköisyyslaskenta*. Kurssimateriaali. Aalto-yliopisto. Espoo. 450+50 s.

Nykyri, J. (2015). *Ohutuumaisen laitekannatinpalkin luotettavuusperusteinen stabiilius-analyysi*. Diplomityö. Aalto-yliopisto. Espoo. 93+79 s.

RIL. (2009). *RIL 207-2009 Geotekninen suunnittelu. Eurokoodin EN 1997-1 suunnitteluohje*. Helsinki: Suomen rakennusinsinöörien liitto RIL ry. 244 s. ISBN 978-951-758-505-7.

Rudd, H. (2015). *VBA Monte Carlo risk analysis spreadsheet with correlation using the Iman-Conover method. Part 2* [verkkoaineisto]. [viitattu 4.12.2017]. Saatavissa: <https://www.howardrudd.net/how-tos/vba-monte-carlo-risk-analysis-spreadsheet-with-correlation-part-2/>.

Salmi, T. (2005). *Statiikka*. Tampere: Pressus Oy. 400 s. ISBN 952-9835-60-4.

Salmi, T. & Pajunen, S. (2010). *Lujuusoppi*. Tampere: Pressus Oy. 462 s. ISBN 978-952-935-67-6.

SFS-EN 1990+A1+AC. (2006). *Eurokoodi. Rakenteiden suunnitteluperusteet*. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto. 184 s.

SFS-EN 1992-1-1+A1+AC. (2015). *Eurokoodi 2: Betonirakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt*. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto. 218+1 s.

SFS-EN 1997-1+A1+AC. (2015). *Eurokoodi 7: Geotekninen suunnittelu. Osa 1: Yleiset säännöt*. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto. 161 s.

Shields, M. D. Zhang, J. (2016). *The generalization of Latin hypercube sampling*. Reliability Engineering and System Safety. Vol. 148:1. S. 96-108. ISSN 0951-8320.

Tielaitos. (1999). *Pohjarakennusohjeet sillansuunnittelussa*. Helsinki. 71 s. ISBN 951-726-583-2. [verkkoaineisto]. [viitattu 2.1.2018]. Saatavissa: <https://julkaisut.liikennevirasto.fi/sillat/julkaisut/prakos99.pdf>.

Ympäristöministeriö. (2017). *Rakenteiden lujuus ja vakaus. Teräsrakenteet*. Suomen rakentamismääräyskokoelma. 96 s. [verkkoaineisto]. [viitattu 12.2.2018]. Saatavissa: http://www.ym.fi/fi-FI/Maankaytto_ja_rakentaminen/Lainsaadanto_ja_ohjeet/Rakentamismaarayskokoelma/Rakenteiden_lujuus_ja_vakaus.

Liiteluettelo

Liite 1. *VBA-algoritmi RFEM5 Monte Carlo -simulaatiolle*, 6 sivua

Liite 2. *Jäykkäkantaisen pystysuunnassa jousitetun yksiaukkoisen tasokehän analyysi saurarakenteiden siirtymämenetelmällä*, 12 sivua

LIITE 1: VBA-algoritmi RFEM5 Monte Carlo -simulaatiolle

```

'-----
Sub Epävarmuusanalyysi_RFEM5_pystyjuositettu_1auk_tasokehä()
'-----
' Idea is to consider uncertainty related to foundation supports of the columns
' and derive it into internal forces of the single span frame.
' Works for a model with 2 nodal supports.
' Varies only vertical stiffness of a support.

'Empty previous results from the excel sheet
Sheets("CalculationData").Range("B3:T20000").ClearContents
Sheets("CalculationData").Range("U4:AG4").ClearContents

' Regular procedure
Dim model As RFEM5.model
Set model = GetObject(, "RFEM5.Model")
model.GetApplication.LockLicense
On Error GoTo E
Dim data As IModelData
Set data = model.GetModelData

'value to move result print cell down
Dim pos As Long
pos = 3
Dim s, h, k, supNum As Integer

'Time when entering the calculation loop
Dim timebefore As Date
timebefore = Time()

'Import sample space
Dim myFile As String, textline As String
myFile = "C:\Users\JUKE\Documents\Koulu\DIPPA\Raja-arvo_analyysi\otos1.txt"
Open myFile For Input As #1
Dim aArray() As String
ReDim aArray(1 To 1) As String
Do Until EOF(1)
    Line Input #1, textline
    aArray(UBound(aArray)) = textline
    ReDim Preserve aArray(1 To UBound(aArray) + 1) As String
Loop

```

```

Close #1
ReDim spring1(1 To (UBound(aArray) - 1)) As Double
ReDim spring2(1 To (UBound(aArray) - 1)) As Double
Dim element() As String
Dim CountA As Integer
For CountA = 1 To (UBound(aArray) - 1)
    element() = Split(aArray(CountA), " ")
    spring1(CountA) = CDBl(element(0))
    spring2(CountA) = CDBl(element(1))
Next CountA
For s = 1 To UBound(spring1)
    If spring1(s) = spring2(s) Then
        ReDim NodalSupArr(0) As NodalSupport
        NodalSupArr = data.GetNodalSupports
        NodalSupArr(0).SupportConstantZ = spring1(s)
        NodalSupArr(0).NodeList = "1,4"
        NodalSupArr(0).No = 1
    Else
        ReDim NodalSupArrTemp(0) As NodalSupport
        NodalSupArrTemp = data.GetNodalSupports
        ReDim NodalSupArr(1) As NodalSupport
        NodalSupArr(0) = NodalSupArrTemp(0)
        NodalSupArr(1) = NodalSupArrTemp(0)
        NodalSupArr(0).SupportConstantZ = spring1(s)
        NodalSupArr(0).NodeList = "1"
        NodalSupArr(0).No = 1
        NodalSupArr(1).SupportConstantZ = spring2(s)
        NodalSupArr(1).NodeList = "4"
        NodalSupArr(1).No = 2
    End If

    'Write the picked stiffness values to the sheet
    Sheets("CalculationData").Cells((pos), (18)) = spring1(s)
    Sheets("CalculationData").Cells((pos), (19)) = spring2(s)

    data.PrepareModification
    data.SetNodalSupports NodalSupArr
    data.FinishModification

    'Calculate the RFEM-model and retrieve wanted results
    Dim calculation As ICalculation
    Set calculation = model.GetCalculation

```



```

calculation.CalculateAll
Dim Results As IResults
Set Results = calculation.GetResultsInFeNodes(LoadCaseType, 1)
Dim countM1, countM2, countM3 As Integer
countM1 = Results.GetMemberInternalForcesCount(1, AtNo, True)
countM2 = Results.GetMemberInternalForcesCount(2, AtNo, True)
countM3 = Results.GetMemberInternalForcesCount(3, AtNo, True)
ReDim MIFs1(countM1) As MemberForces
MIFs1 = Results.GetMemberInternalForces(1, AtNo, True)
ReDim MIFs2(countM2) As MemberForces
MIFs2 = Results.GetMemberInternalForces(2, AtNo, True)
ReDim MIFs3(countM3) As MemberForces
MIFs3 = Results.GetMemberInternalForces(3, AtNo, True)

'Retrieve internal forces
Dim M1, N1, M2, N2, V2, M3, N3, M4, N4, V4, M5, N5 As Double
M1 = MIFs1(0).Moments.Y
N1 = MIFs1(0).Forces.X
M2 = MIFs2(0).Moments.Y
N2 = MIFs1(UBound(MIFs1)).Forces.X
V2 = MIFs2(0).Forces.Z
M3 = MIFs2(UBound(MIFs2) / 2).Moments.Y
N3 = MIFs2(UBound(MIFs2) / 2).Forces.X
M4 = MIFs3(0).Moments.Y
N4 = MIFs3(0).Forces.X
V4 = MIFs2(UBound(MIFs2)).Forces.Z
M5 = MIFs3(UBound(MIFs3)).Moments.Y
N5 = MIFs3(UBound(MIFs3)).Forces.X

' Write column showing iteration numbers on the sheet
writeiterationnumbers (UBound(spring1))
'Write results
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 3).Value = M1
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 4).Value = N1
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 5).Value = M2
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 6).Value = N2
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 7).Value = V2
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 8).Value = M3
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 9).Value = N3
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 10).Value = M4
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 11).Value = N4
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 12).Value = V4

```

```
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 13).Value = M5
```

```
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 14).Value = N5
```

```
'Solve supports vertical nodal displacement
```

```
'sup 1
```

```
Dim ndcount1 As Integer
```

```
ndcount1 = Results.GetNodalDeformationsCount(1, AtNo)
```

```
ReDim ndisp1(ndcount1) As NodalDeformations
```

```
ndisp1 = Results.GetNodalDeformations(1, AtNo)
```

```
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 16).Value = ndisp1(0).Displacements.Z *
```

```
1000
```

```
'sup2
```

```
Dim ndcount4 As Integer
```

```
ndcount4 = Results.GetNodalDeformationsCount(4, AtNo)
```

```
ReDim ndisp4(ndcount4) As NodalDeformations
```

```
ndisp4 = Results.GetNodalDeformations(4, AtNo)
```

```
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 17).Value = ndisp4(0).Displacements.Z *
```

```
1000
```

```
'difference
```

```
Dim deltadif As Double
```

```
deltadif = (ndisp1(0).Displacements.Z - ndisp4(0).Displacements.Z) * 1000
```

```
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 15).Value = deltadif
```

```
'beam rotation
```

```
Dim brot As Double
```

```
brot = (deltadif / 1000) / data.GetMember(2, AtNo).GetData.Length * 1000
```

```
Sheets("CalculationData").Cells(pos, 20).Value = brot
```

```
pos = pos + 1
```

```
Set calculation = Nothing
```

```
Set Results = Nothing
```

```
'Save initial data to the sheet
```

```
'Geometry
```

```
Sheets("CalculationData").Range("U4").Value = data.GetMember(2, AtNo).Get-  
Data.Length
```

```
Sheets("CalculationData").Range("V4").Value = data.GetMember(1, AtNo).Get-  
Data.Length
```

```
'Bending stiffness
```

```
'column
```

```
Dim cnum As Integer
```

```
cnum = data.GetMember(1, AtNo).GetData.StartCrossSectionNo
```

```
Dim i, E As Double
```

```
i = data.GetCrossSection(cnum, AtNo).GetData.BendingMomentY
```

```

Dim matnum As Integer
matnum = data.GetCrossSection(cnum, AtNo).GetData.MaterialNo
E = data.GetMaterial(matnum, AtNo).GetData.ElasticityModulus
Sheets("CalculationData").Range("W4").Value = E * i
'beam
Dim bnum As Integer
bnum = data.GetMember(2, AtNo).GetData.StartCrossSectionNo
i = data.GetCrossSection(cnum, AtNo).GetData.BendingMomentY
matnum = data.GetCrossSection(bnum, AtNo).GetData.MaterialNo
E = data.GetMaterial(matnum, AtNo).GetData.ElasticityModulus
Sheets("CalculationData").Range("X4").Value = E * i
>Loading
Sheets("CalculationData").Range("Y4").Value = model.GetLoads.GetLoadCase(1,
AtNo).GetMemberLoad(1, AtNo).GetData.Magnitude1 / 1000
'Sheets("CalculationData").Range("Z4").Value = model.GetLoads.GetLoadCase(1,
AtNo).GetMemberLoad(2, AtNo).GetData.Magnitude1 / 1000
'Solving method
Sheets("CalculationData").Range("AF4").Value = "LHC"
'Distribution type
Sheets("CalculationData").Range("AA4").Value = "Normal"
'Distribution mean
Sheets("CalculationData").Range("AB4").Value = "old"
'Standard deviation
Sheets("CalculationData").Range("AC4").Value = "old"
'Number of calculations
Sheets("CalculationData").Range("AG4").Value = UBound(spring1)
'Lower limit of probability distributino (cut of normal distribution)
Sheets("CalculationData").Range("AD4").Value = spring1(1)
Next s

'Time after the calculation
Dim timeafter As Date
timeafter = Time()
'Calculate the calculation time
Dim calctime As Date
calctime = timeafter - timebefore
Sheets("Results").Range("AW3").Value = calctime

E: data.PrepareModification
data.FinishModification
If Err.Number <> 0 Then MsgBox Err.Description, , Err.Source

```

```
Set data = Nothing  
model.GetApplication.UnlockLicense  
Set model = Nothing
```

```
End Sub
```

LIITE 2: Jäykkäkantaisen pystysuunnassa jousitetun yksiaukkoisen tasokehän analyysi sauvarakenteiden siirtymämenetelmällä

Tässä laskelmassa määritetään seuraavan sivun tasokehän sisäisten voimien ja perustusten joustavuuden analyttinen yhteys. Analyttistä yhtälöä tarvitaan kehän herkkyystarkasteluissa suhteessa perustusten joustavuuteen.

Tässä laskelmassa ei huomioida sauvojen kokoonpuristumaa, mikä aiheuttaa pienen poikkeaman tietokoneella suoritettuun elementtimenetelmää hyödyntävään laskentaan.

Oletettaessa sauvat kokoonpuristumattomiksi saadaan vähennettyä systeemivapausasteiden eli ratkaistavien yhtälöiden lukumäärää. Aiheutuva virhe on suhteellisen pieni kunhan jouset pidetään merkittävästi löysempinä kuin sauvojen aksiaalinen jäykkyys. Tässä tapauksessa pilari on merkittävästi maajousta jäykempi. Esimerkiksi luvun 3 lähtötiedoilla suhteeksi saadaan:

$$E_{\text{betoni.C30}} := 3300 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad A_{\text{pilari}} := 0.5 \cdot 0.3 \text{m}^2 \quad H_{\text{pilari}} := 6 \text{m}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Pilarin toiminnallinen aksiaalijäykkyys} & EA_{\text{pilari}} := \frac{E_{\text{betoni.C30}} \cdot A_{\text{pilari}}}{H_{\text{pilari}}} = 825 \cdot \frac{\text{MN}}{\text{m}} \end{array}$$

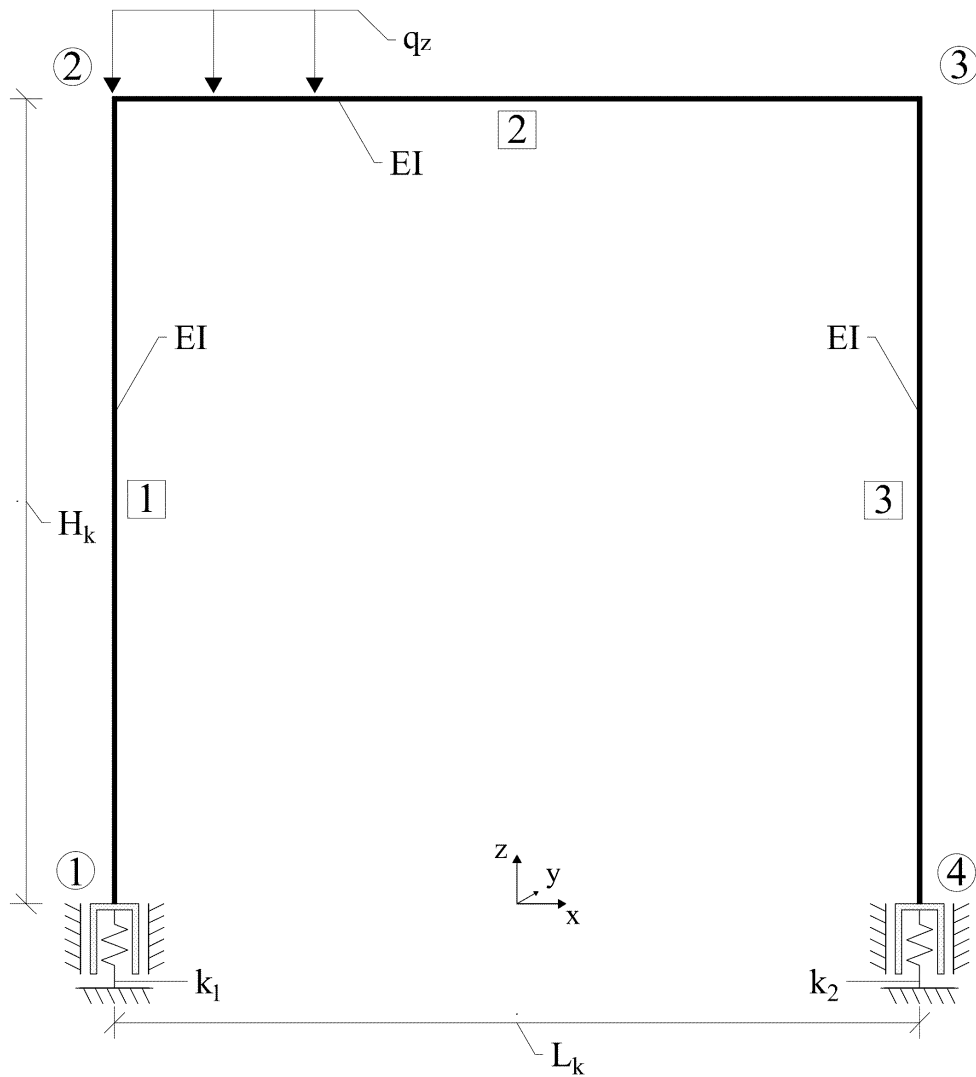
$$\begin{array}{ll} \text{Maajousen jäykkyys} & k_j := 25 \frac{\text{MN}}{\text{m}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Jäykkyyksien suhde} & \frac{EA_{\text{pilari}}}{k_j} = 33 \end{array}$$

Laskennan vaiheet

(muokattu lähteestä Aalto, s. 173)

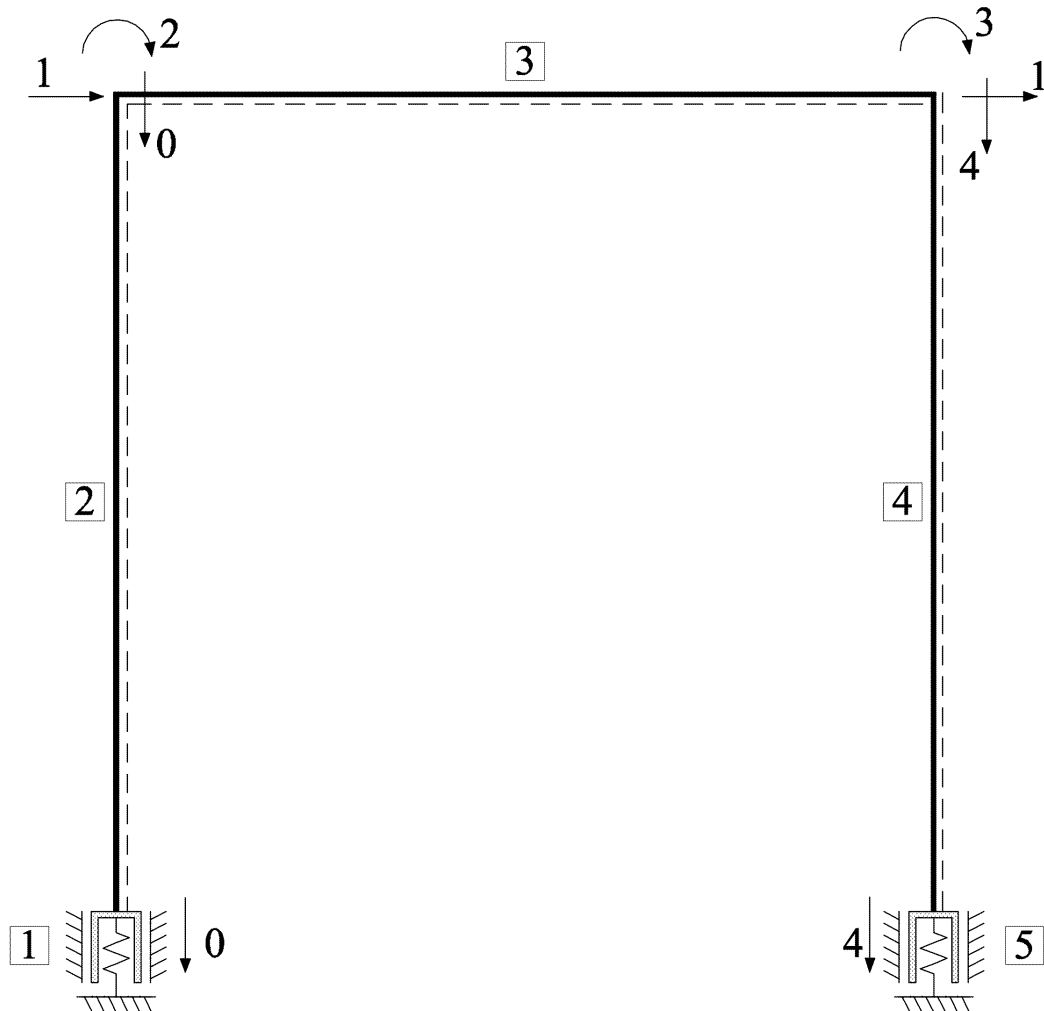
1. Määritä rakennemalli
2. Piirrä systeemivapausasteet
3. Piirrä elementtivapausasteet
4. Määritä elementtien jäykkyyismatriisit
5. Kokoa rakenteen jäykkyyismatriisi
6. Kokoa rakenteen kuormitusvektori
7. Muodosta vapausastekuormat sisältävä voimavektori
8. Ratkaise systeemivapausasteet
9. Määritä elementtikohtaiset vapausasteet
10. Ratkaise elementtien vapausastevoimat
11. Määritä sisäiset voimat

1. Rakennemalli

Tuet ovat siis z -suuntaa lukuun ottamatta jäykät. Palkkiin kohdistuu tasan jakautunut viivakuorma koko pituudellaan.

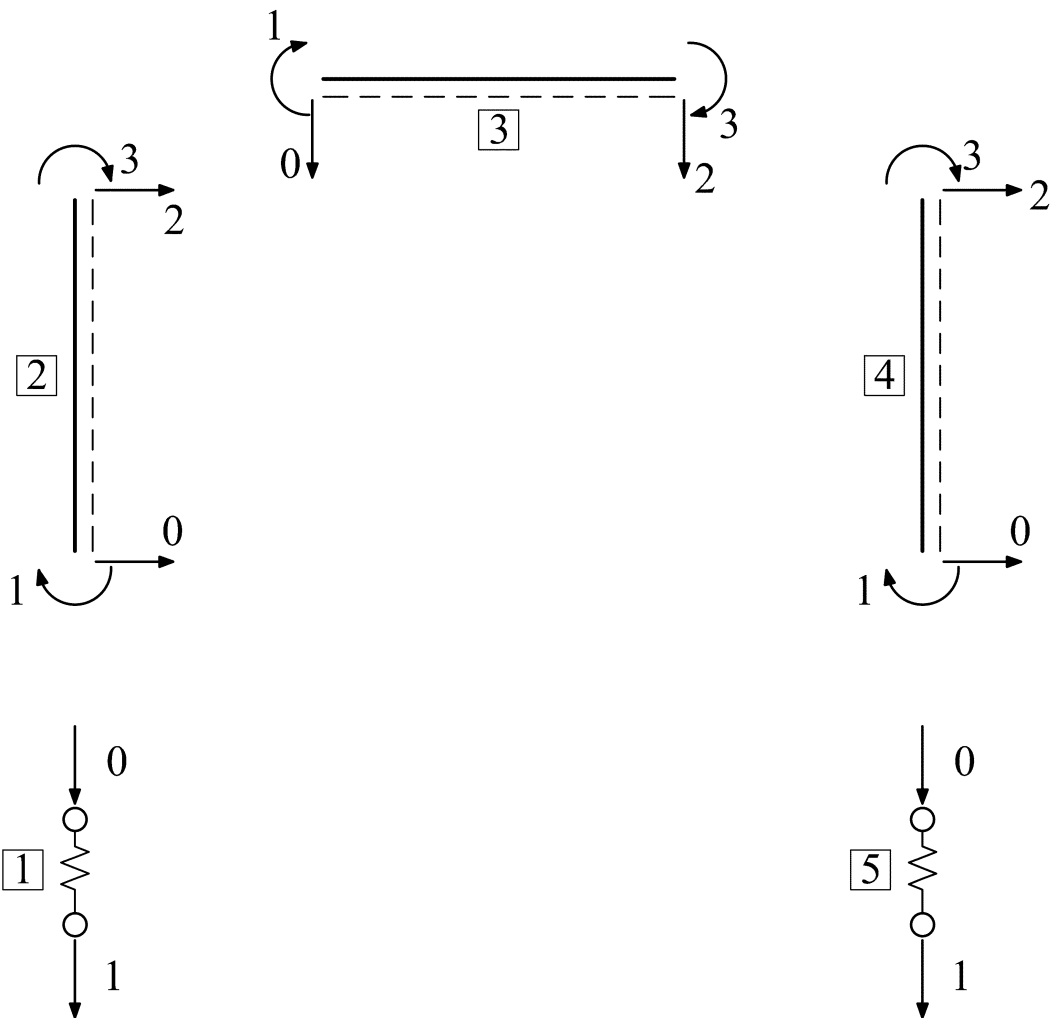
2. Systemivapausasteet

Numerointi on aloitettu nollasta matriisien ja vektoreiden alkioden numeroinnin sujuvoittamiseksi. Vaikka tätä yksinkertaistettua laskentaa kutsutaankin "käsinlaskennaksi" niin yhtälöryhmät ratkaitaan symboliseen laskentaan sopivalla tietokoneohjelmalla. Ohjelmassa matriisien ja vektoreiden numerointi alkaa nolasta kuten ohjelmoinnissa yleisesti.



Koska systeemivapausasteita on 5 kpl niin rakenteen jäykkyysmatriisi tulee olemaan 5x5 -kokoinen.

3. Elementtivapausasteet



Tässä laskelmassa elementtien koordinaatistoja ei ole tarpeen kiertää pääkoordinaatistoon, sillä elementtien ollessa kohtisuorassa toisiaan vastaan jäykkyyismatriisia koottaessa on helppo päätellä oikeat suunnat.

4. Elementtikohtaiset jäykkyyismatriisit

Elementti 1: Yleistetty jousielementti

Jäykkyyismatriisi

$$K1 := \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{pmatrix}$$

Elementti 2: Pilari, 4 vapausastetta

$$K2 := EI \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{H_k^3} & \frac{6}{H_k^2} & \frac{-12}{H_k^3} & \frac{6}{H_k^2} \\ \frac{6}{H_k^2} & \frac{4}{H_k} & \frac{-6}{H_k^2} & \frac{2}{H_k} \\ \frac{-12}{H_k^3} & \frac{-6}{H_k^2} & \frac{12}{H_k^3} & \frac{-6}{H_k^2} \\ \frac{6}{H_k^2} & \frac{2}{H_k} & \frac{-6}{H_k^2} & \frac{4}{H_k} \end{pmatrix}$$

Elementti 3: Palkki, 4 vapausastetta

$$K3 := EI \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L_k^3} & \frac{6}{L_k^2} & \frac{-12}{L_k^3} & \frac{6}{L_k^2} \\ \frac{6}{L_k^2} & \frac{4}{L_k} & \frac{-6}{L_k^2} & \frac{2}{L_k} \\ \frac{-12}{L_k^3} & \frac{-6}{L_k^2} & \frac{12}{L_k^3} & \frac{-6}{L_k^2} \\ \frac{6}{L_k^2} & \frac{2}{L_k} & \frac{-6}{L_k^2} & \frac{4}{L_k} \end{pmatrix}$$

Elementti 4: Pilari, 4 vapausastetta

$$K4 := EI \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{H_k^3} & \frac{6}{H_k^2} & \frac{-12}{H_k^3} & \frac{6}{H_k^2} \\ \frac{6}{H_k^2} & \frac{4}{H_k} & \frac{-6}{H_k^2} & \frac{2}{H_k} \\ \frac{-12}{H_k^3} & \frac{-6}{H_k^2} & \frac{12}{H_k^3} & \frac{-6}{H_k^2} \\ \frac{6}{H_k^2} & \frac{2}{H_k} & \frac{-6}{H_k^2} & \frac{4}{H_k} \end{pmatrix}$$

Elementti 5: Yleistetty jousielementti

Jäykkyysmatriisi

$$K5 := \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

5. Rakenteen jäykkyysmatriisin kokoaminen

5x5 kokoiseen jäykkyysmatriisiin täytyy selvittää 15 alkiota, sillä symmetrian avulla saadaan loput 10 alkiota.

$$K = \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} & K_{03} & K_{04} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{30} & K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{40} & K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Globaalin jäykkyysmatriisin kokoaminen noudattaa kaavaa:

$$K_{ij} = \sum_e K_{rs}^e$$

missä

i ja j ovat systeemivapausasteiden tunnuksset

r ja s ovat systeemivapausasteita i ja j vastaavien elementin vapausasteiden tunnuksset

Summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteisiin i ja j. Tässä tapauksessa matriisin kokoamisessa ei ole kierretty elementtien jäykkyysmatriiseja vaan yhdistetty oikeat alkiot päättelämällä, sillä sauvojen ollessa kohtisuorassa toisiaan vastaan tämä ei vaadi kohtuutonta päättelyä.

$$K_{0,0} := K_{10,0} + K_{30,0} \qquad K_{0,0} \rightarrow k_1 + \frac{12 \cdot EI}{L_k^3}$$

$$K_{0,1} := 0 \qquad K_{0,1} \rightarrow 0$$

$$K_{0,2} := K_{30,1} \qquad K_{0,2} \rightarrow \frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{0,3} := K_{30,3} \qquad K_{0,3} \rightarrow \frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{0,4} := K_{30,2} \qquad K_{0,4} \rightarrow -\frac{12 \cdot EI}{L_k^3}$$

$$K_{1,0} := 0 \qquad K_{1,0} \rightarrow 0$$

$$K_{1,1} := K_{2,2} + K_{4,2}$$

$$K_{1,1} \rightarrow \frac{24 \cdot EI}{H_k^3}$$

$$K_{1,2} := K_{2,3}$$

$$K_{1,2} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2}$$

$$K_{1,3} := K_{4,3}$$

$$K_{1,3} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2}$$

$$K_{1,4} := 0$$

$$K_{1,4} \rightarrow 0$$

$$K_{2,0} := K_{0,2}$$

$$K_{2,0} \rightarrow \frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{2,1} := K_{1,2}$$

$$K_{2,1} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2}$$

$$K_{2,2} := K_{3,3} + K_{1,1}$$

$$K_{2,2} \rightarrow \frac{4 \cdot EI}{H_k} + \frac{4 \cdot EI}{L_k}$$

$$K_{2,3} := K_{1,3}$$

$$K_{2,3} \rightarrow \frac{2 \cdot EI}{L_k}$$

$$K_{2,4} := K_{1,2}$$

$$K_{2,4} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{3,0} := K_{0,3}$$

$$K_{3,0} \rightarrow \frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{3,1} := K_{1,3}$$

$$K_{3,1} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2}$$

$$K_{3,2} := K_{2,3}$$

$$K_{3,2} \rightarrow \frac{2 \cdot EI}{L_k}$$

$$K_{3,3} := K_{3,3} + K_{4,3}$$

$$K_{3,3} \rightarrow \frac{4 \cdot EI}{H_k} + \frac{4 \cdot EI}{L_k}$$

$$K_{3,4} := K_{3,2}$$

$$K_{3,4} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{4,0} := K_{0,4}$$

$$K_{4,0} \rightarrow -\frac{12 \cdot EI}{L_k^3}$$

$$K_{4,1} := K_{1,4}$$

$$K_{4,1} \rightarrow 0$$

$$K_{4,2} := K_{2,4}$$

$$K_{4,2} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{4,3} := K_{3,4}$$

$$K_{4,3} \rightarrow -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2}$$

$$K_{4,4} := K_{0,0} + K_{2,2}$$

$$K_{4,4} \rightarrow k_2 + \frac{12 \cdot EI}{L_k^3}$$

Alla on esitetty rakenteen jäykkyyssmatriisi.

$$K \rightarrow \begin{pmatrix} k_1 + \frac{12 \cdot EI}{L_k^3} & 0 & \frac{6 \cdot EI}{L_k^2} & \frac{6 \cdot EI}{L_k^2} & -\frac{12 \cdot EI}{L_k^3} \\ 0 & \frac{24 \cdot EI}{H_k^3} & -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2} & -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2} & 0 \\ \frac{6 \cdot EI}{L_k^2} & -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2} & \frac{4 \cdot EI}{H_k} + \frac{4 \cdot EI}{L_k} & \frac{2 \cdot EI}{L_k} & -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2} \\ \frac{6 \cdot EI}{L_k^2} & -\frac{6 \cdot EI}{H_k^2} & \frac{2 \cdot EI}{L_k} & \frac{4 \cdot EI}{H_k} + \frac{4 \cdot EI}{L_k} & -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2} \\ -\frac{12 \cdot EI}{L_k^3} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2} & -\frac{6 \cdot EI}{L_k^2} & k_2 + \frac{12 \cdot EI}{L_k^3} \end{pmatrix}$$

6. Rakenteen kuormitusvektorin kokoaminen

Tälle tapaukselle saadaan alla oleva kuormitusvektori, sillä ainoa ulkoinen kuormitus on tasan jakautunut kuorma palkille.

$$FK := \begin{pmatrix} -\frac{q \cdot L_k}{2} \\ 0 \\ -\frac{q \cdot L_k^2}{12} \\ \frac{q \cdot L_k^2}{12} \\ -\frac{q \cdot L_k}{2} \end{pmatrix}$$

7. Vapausastekuormat sisältävän voimavektorin muodostaminen

Tässä tapauksessa vapausastekuormia ei ole.

8. *Systeemivapausasteiden ratkaiseminen*

Ratkaistava yhtälöryhmä on

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{FK} = 0$$

missä vektori \mathbf{a} sisältää systeemivapausasteet.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} v_1 \\ u \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} := \mathbf{K}^{-1} \cdot (-\mathbf{FK})$$

9. *Elementtikohtaisten vapausasteiden määrittäminen*

Kun systeemivapausasteet on ratkaistu niin edetään takaisinsijoittamalla nämä elementtien, tässä tapauksessa, vain palkin vapausasteiksi.

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_2 \\ v_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

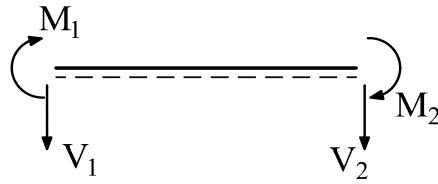


10. *Elementtikohtaisten vapausastevoimien määrittäminen*

Palkki on kuormitettu tasaisesti eli kuormitusvektori on kuten alla.

$$\mathbf{FK}_3 := \begin{pmatrix} \frac{-q \cdot L_k}{2} \\ \frac{-q \cdot L_k^2}{12} \\ -q \cdot L_k \\ \frac{q \cdot L_k^2}{12} \end{pmatrix}$$

Ratkaistaan palin vapausastevoimat (esitetty kuvassa alla) yhtälöryhmästä.



$$F3 := K3 \cdot a3 + FK3$$

$$F3 = \begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

11. Sisäisten voimien määrittäminen

Määritetään tässä laskelmassa vain palkin päissä vaikuttavat taivutusmomentit, jotka saadaan vapausastevoimista seuraavasti. Palkin loppupäässä taivutusmomentti on sauvanpäämomentin vastaluku. Alaindeksillä viitataan vapausastevoimat sisältävän vektorin alkioihin. Alaindeksi yksi tarkoittaa tässä tapauksessa vektorin toista alkioita.

$$M_1 := F3_1$$

$$M_2 := (-F3)_3$$

Ratkaisuna saadaan yhteys nurkkamomentin ja rakenteen parametrien, mukaan lukien jousivakioiden, välille. Yhtälössä alla, tasokehän korkeus ja leveys on asetettu yhtä suuriksi mutta ratkaistussa kokonaisessa yhtälössä (ei mahdu tulostukseen) nämäkin parametrit voidaan erotella.



Vasemman nurkan taivutusmomentti

$$M_1(H, EI, q, k_1, k_2) = -\frac{H^2 q (7k_1 k_2 \cdot H^3 + 66EI \cdot k_1 - 42 \cdot EI \cdot k_2)}{18(7k_1 k_2 \cdot H^3 + 12EI \cdot k_1 + 12EI \cdot k_2)}$$

Oikean nurkan taivutusmomentti

$$M_2(H, EI, q, k_1, k_2) = -\frac{H^2 \cdot q \cdot (7 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot H^3 - 42 \cdot EI \cdot k_1 + 66 \cdot EI \cdot k_2)}{18 \cdot (7 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot H^3 + 12 \cdot EI \cdot k_1 + 12 \cdot EI \cdot k_2)}$$

Lähde: Jukka Aalto. Sauvarakenteiden kimmoiset menetelmät.

Opetusmateriaalia. Teknillinen korkeakoulu (ei saatavilla).

Samaa menetelmää on käytetty osittain lähteessä: Aalto, J. 2007. Sauvan pituudenmuutosyhtälö ja sen sovellutuksia. Rakenteiden mekaniikka. Vol 40:3. S. 38-62. ISSN 1797-5301. (sähköinen).